HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES.

HISTOIRE

DES

SCIENCES

MATHÉMATIQUES

ET PHYSIQUES,

PAR

M. MAXIMILIEN MARIE,

RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE,
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

6

TOME VI.

DE NEWTON A EULER.

(Suite.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

—

1885

TABLE DES MATIÈRES.

ONZIÈME PÉRIODE.

(SUITE)

De NEWTON, né en 1642,
à EULER, né en 1707.

Noms des savants de cette Période.

	Né en	Mort en
NEWTON	1642	1726
DOERFEL	1643	1688
RÖMER	1644	1710
DELISLE	1644	1720
MAYOW	1645	1679
LEMERY (NICOLAS)	1645	1715
LEIBNIZ	1646	1716
FLAMSTEED	1646	1719
PAPIN	1647	1714
RAPHSON	1647	1715
CEVA	1648	1737
CHERUBIN	1650	
LEFEVRE (JEAN)	1650	1706
SAVERY	1650	1715
CHIRAC	1650	1732
DE TSCHIRNHAUSEN	1651	1708
SHARP	1651	1742
HOMBERG	1652	1715
ROLLE	1652	1719
BION	1652	1733
SAUVEUR	1653	1716
BERNOULLI (JACQUES)	1654	1705
VARIGNON	1654	1722
NIEUWENTYT	1654	1718
GUGLIELMINI	1655	1710
TOURNEFORT	1656	1708
EISENSCHMID	1656	1712
CRAIG	1656	1718
HALLEY	1656	1724
HARTSOECKER	1656	1725
TRUCHET	1657	1729
DERHAM	1657	1735

	Né en	Mort en
Fontenelle	1657	1740
Saurin	1659	1737
Stahl	1660	1734
De Lagny	1660	1734
Hoffmann	1660	1742
L'Hospital	1661	1704
Gregory (David)	1661	1710
Bianchini	1662	1729
Bignon	1662	1748
Amontons	1663	1705
Nicolas	1663	1720
Fatio de Duiller	1664	1753
Maraldi	1665	1729
Parent	1666	1716
Dangicourt	1666	1727
Bernoulli (Jean)	1667	1748
Whiston (William)	1667	1752
De Moivre	1667	1754
Boerhaave	1668	1738
Winslow	1669	1760
Newcommen	1670	1730
Hadley	1670	1744
Keill	1671	1721
Louville d'Allonville	1671	1732
Guido Grandi	1671	1742
Geoffroy	1672	1731
Keill (James)	1673	1719
Manfredi	1674	1739
Ditton	1675	1715
Graham	1675	1751
De la Garaye	1675	1755
Delisle	1676	1726
Riccati	1676	1754
Lemonnier	1676	1757
De la Hire	1677	1719
Lémery (Louis)	1677	1743
Cassini (Jacques)	1677	1756
Montmort	1678	1719
Lémery (Jacques)	1678	1721
Moitrel d'Élément	1678	1730
Hermann	1678	1733
Ons en Bray	1678	1754
Mairan	1678	1771

	Né en	Mort en
HENKEL	1679	1744
ZENDRINI	1679	1747
WOLFF	1679	1754
SANTORINI	1681	1736
COTES	1682	1716
FAGNANO	1682	1766
FREZIER	1682	1776
NEUMANN	1683	1737
DESAGULIERS	1683	1744
RÉAUMUR	1683	1757
NICOLE	1683	1758
TAYLOR	1685	1731
FAHRENHEIT	1686	1736
ANTOINE DE JUSSIEU	1686	1758
LEROY	1686	1759
BERNOULLI (NICOLAS)	1687	1759
SIMSON (ROBERT)	1687	1768
S'GRAVESENDE	1688	1742
BRAGELONGNE	1688	1744
DELISLE	1688	1768
GAUBIL	1689	1759
VAN MUSSCHENBROEK	1692	1761
BRADLEY	1692	1762
FERRACINO	1692	1777
HARRISON	1693	1776
PEYSSONNEL	1694	1759
BRANDT	1694	1768
PEMBERTON	1694	1771
BERNOULLI (NICOLAS II)	1695	1726
STIRLING	1696	1770
BEVIS	1696	1771
ALBINUS	1697	1770
SARRABAT	1698	1737
DU FAY	1698	1739
MAC-LAURIN	1698	1746
BOUGUER	1698	1758
MAUPERTUIS	1698	1759
KLINGENSTIERNA	1698	1765
CAMUS	1699	1768
BERNARD DE JUSSIEU	1699	1777
GRAY	1700	1760
NOLLET	1700	1770
SCHIRACH	1700	1773

	Né en	Mort en
Duhamel Dumonceau	1700	1781
Bianconi		1781
Bernoulli (Daniel)	1700	1782
Tremblay	1700	1784
Hull	1700	
Celsius	1701	1744
De la Condamine	1701	1774
Lecchi	1702	1776
Trudaine	1703	1765
Deparcieux	1703	1768
Rouelle (l'ainé)	1703	1770
Leseur	1703	1770
Dalibard	1703	1799
Cramer	1704	1752
Godin	1704	1760
Fontaine des Bertins	1705	1771
Dollond	1706	1761
Franklin	1706	1790
Robins	1707	1751
Linné	1707	1778

BIOGRAPHIE

DES

SAVANTS DE LA ONZIÈME PÉRIODE

ET

ANALYSE DE LEURS TRAVAUX.

(*Suite.*)

NEWTON.

(Né en 1642, mort en 1726.)

(Suite et fin.)

Principes de la Philosophie naturelle.

Nous voici arrivés au grand Ouvrage de Newton, dont le mérite a si justement inspiré l'admiration universelle que la postérité ne l'aperçoit plus qu'à travers des hyperboles infranchissables. Nous tâcherons d'en rendre compte sans subir l'influence des amplifications qui encombrent la voie, et sans manquer au respect dû à son immortel auteur.

On y retrouve la manie, que nous avons déjà signalée dans les autres ouvrages de Newton, de présenter, à propos des questions les plus inabordables, des solutions approchées, graphiques ou arithmétiques.

Fermat disait : *Multi pertransibunt et augebitur scientia*; Newton, au contraire, a toujours l'air de croire qu'il ne se fera

plus rien après lui et qu'il importe par conséquent qu'il dise tout ce qu'il sait, sur ce qu'il ne sait pas, de peur qu'on n'en sache jamais rien. De là bien des Chapitres que nous serons obligés de passer sous silence, parce qu'on en est resté, comme Newton, au point de départ, sur les questions auxquelles ils se rapportent. Nous en citerons quelques exemples tirés du Premier Livre.

Proposition XLVI.

Une loi quelconque de forces centripètes étant donnée, on demande, *en supposant la quadrature des courbes,* le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné avec une vitesse donnée et suivant une droite donnée, sur un plan qui ne passe pas par le centre des forces.

Proposition LIII.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les forces par lesquelles les corps feront toujours des oscillations isochrones dans des courbes données.

Proposition LIV.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les temps dans lesquels les corps montent et descendent dans des courbes quelconques par une force centripète quelconque, ces courbes étant décrites dans un plan qui passe par le centre des forces.

Proposition LVI.

En supposant la quadrature des courbes et connaissant la loi de la force qui tend vers un centre donné dans l'axe d'une surface courbe quelconque, on demande la trajectoire décrite sur

cette surface par un corps poussé suivant une vitesse et une direction quelconques, etc.

« Supposer la quadrature des courbes » doit se traduire en langage moderne par « supposer qu'on ait fait les intégrations nécessaires à la solution des problèmes énoncés. »

Une grande partie du Second Livre est employée à l'établissement d'une théorie de la résistance des milieux. Il serait inutile de dire que cette théorie laisse beaucoup à désirer, puisque la question est encore à peu près entière aujourd'hui. Mais l'objet principal que Newton y a en vue est le renversement de la doctrine des tourbillons de Descartes, et la réfutation des hypothèses de notre philosophe était déjà devenue bien superflue.

Quant au Troisième Livre, qui contient l'explication des principaux phénomènes observés relativement à la Terre et à la Lune, Newton y produit, à l'appui de ses lumineuses explications, des calculs qui ne donnent guère qu'une première approximation et dont nous nous bornerons à énoncer les résultats.

Nous nous occuperons principalement du Premier Livre, où se trouvent consignées les belles découvertes de Newton en Mécanique générale. Mais avant d'entrer dans le détail des démonstrations, nous donnerons quelques indications sur la méthode suivie par l'auteur.

Newton ne fait jamais appel aux ressources que fournit la méthode des modernes, de supposer les grandeurs représentées en nombres; il ne se sert pas davantage des méthodes de calcul de Descartes où de Viète; il en est resté à l'Algèbre d'Archimède et d'Apollonius. De là, d'abord, des longueurs interminables, une grande obscurité et beaucoup de fatigue pour le lecteur, mais aussi un grave défaut : Apollonius ne raisonnait que sur des

longueurs et il lui était facile de les représenter de façon à les faire entrer dans ses formules; Newton a, de plus, à spéculer sur les forces, des vitesses, des accélérations et des temps qu'il ne cherche à introduire sous aucune espèce.

On conçoit bien que voulant conserver leur forme antique aux relations, c'est-à-dire y faire entrer les grandeurs elles-mêmes, il se soit trouvé embarrassé en présence de grandeurs nouvelles.

Cependant les forces sont assimilables à des poids et peuvent être représentées par ceux de volumes définis d'un corps désigné; les vitesses sont des espaces, ainsi que les accélérations; enfin les temps sont, si l'on veut, des angles, ce sont ceux dont la Terre a tourné. Il était donc facile de soumettre toutes ces grandeurs au calcul, sans les supposer évaluées en nombres. Cela eût évité des longueurs bien plus apparentes dans le *Livre des Principes* que dans les *Discorsi* de Galilée ou dans l'*Horologium* de Huyghens.

Je remarquerai encore que Newton paraît avoir conservé les préjugés antiques des géomètres contre la Trigonométrie : il n'y a presque jamais recours dans son *Livre des Principes;* les formules de Trigonométrie ont cependant en Mécanique un usage tout indiqué pour la simplification des énoncés.

On serait naturellement porté à douter, si on ne savait pas le contraire, que Newton fût en possession du calcul des fluxions au moment où il composait son *Livre des Principes.* Il est à remarquer en effet que, quoiqu'il ait établi les bases de ce calcul sur des considérations dynamiques, ce qui semblerait lui assigner ses principales applications, il n'y a cependant jamais recours dans son *Livre des Principes.* Il semblerait que ce fût en réfléchissant après coup sur le genre des démonstrations employées

dans ce livre qu'il entrevit la manière plus simple dont il aurait pu le rédiger.

Y a-t-il rien en effet de plus bizarre que ce contraste : Dans l'Algèbre transcendante de Newton, la fluxion d'une grandeur variable est la vitesse avec laquelle elle croît, le temps, qui n'a rien à faire en Géométrie, y étant introduit par force, comme variable indépendante; au contraire, dans sa Mécanique, la vitesse d'un mobile, qui serait si naturellement définie comme la fluxion de l'espace, reste sans définition; c'est une grandeur dont on doit avoir le sentiment intime, qui ne se représente ni géométriquement ni algébriquement, et qui, réfractaire au calcul, ne saurait se plier à entrer dans les formules. Je sais bien que Newton, ne voulant pas encore représenter les grandeurs par des nombres et répugnant à se servir des méthodes de calcul de Descartes ou de Viète, n'aurait pu que bien difficilement définir la vitesse d'un mobile par quelque chose d'analogue à notre $\frac{ds}{dt}$. Mais, puisqu'il fait ce qu'il faut pour cela dans le calcul des fluxions, comment n'a-t-il pas été amené, avant de commencer la rédaction de son grand Ouvrage, à renoncer à la méthode d'exposition des géomètres grecs?

Nous croyons que la réponse à ces doutes se trouve dans l'hypothèse suivante : lorsque Newton écrivait le *Livre des Principes*, il était fermement résolu à tenir cachée sa méthode des fluxions; ensuite, lorsqu'il se décida, sur les instances de Halley, à le publier, après l'apparition de la *Nova methodus* de Leibniz, le temps et peut-être le courage d'en refondre la rédaction lui manquèrent.

Quoi qu'il en soit, Newton, comme je l'ai dit, n'introduit

amais aucune vitesse dans ses formules : lorsqu'il a à comparer es vitesses de deux mobiles, ou d'un même mobile à des époques ifférentes, il en représente le rapport par celui des chemins infiniment petits parcourus dans des temps égaux.

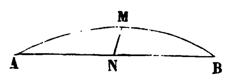
Il se sert du mot *accélération* et nous allons voir comment il ntroduit la chose.

Mais notons d'abord que l'accélération dont il parle est toujours celle que nous nommons accélération totale, ce en quoi il a parfaitement raison, mais il ne la décompose jamais en accélération tangentielle et en accélération centripète, ou normale, quoiqu'il sache parfaitement que l'accélération a la direction de la tangente à la trajectoire aux points où la courbure de cette trajectoire est nulle et qu'elle est au contraire normale lorsque la vitesse est momentanément constante. Il se prive ainsi d'un recours utile en bien des circonstances.

Newton va droit au but et rattache directement la notion de l'accélération d'un mobile à ce que nous appelons sa déviation.

Soient (*fig.* 1) AB un élément de la trajectoire d'un mobile,

Fig. 1.



N le milieu de la corde AB de cet arc, NM la portion d'une parallèle à la direction de la force, comprise entre le point N et la trajectoire; Newton appelle la droite MN la flèche de l'arc AB; cela posé, si un second mobile parcourt un autre arc A′B′, dans le même temps que le premier aura mis à parcourir AB, que l'on construise de même la flèche M′N′ de A′B′, les accélérations des deux mobiles en M et en M′ (ou en d'autres points quel-

conques des arcs infiniment petits AB et A′B′) seront entre elles comme les flèches MN et M′N′, dont le rapport sera aussi égal à celui des forces accélératrices, (c'est-à-dire des forces appliquées aux parties de même poids des deux mobiles, mais Newton emploie le mot sans le définir).

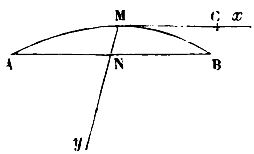
Nous représentons indifféremment l'accélération et la force rapportée à l'unité de masse par

$$\frac{2\,\mathrm{MN}}{dt^2},$$

mais Newton, qui ne représente déjà pas les vitesses, songe encore bien moins à représenter les accélérations [1].

[1] Il n'y a qu'une différence négligeable entre la manière dont Newton définit la flèche de l'arc parcouru et celle dont nous définissons la déviation: Soient (*fig.* 2) MB l'arc parcouru par le mobile dans le temps dt, MC

Fig. 2.



une distance égale à $v\,dt$ portée sur la tangente en M; CB est la déviation. Mais si nous supposons la trajectoire rapportée à la tangente au point M prise pour axe des x et à une parallèle à la force, prise pour axe des y, les équations du mouvement sont

$$x = vt + \ldots$$

et

$$y = \frac{1}{2} j t^2 + \ldots,$$

les termes négligés étant du troisième degré en t. Or on voit, par ces formules que les coordonnées MC et CB du point B sont $v\,dt$ et $\frac{1}{2} j\,dt^2$. Et, si

En résumé, la méthode dont Newton se sert dans ses *Prin-pes de Philosophie naturelle* n'est pas celle des fluxions, il est reste bien facile de la définir : c'est la méthode dont Huyghens est servi dans sa théorie de la courbure des courbes, et de leurs éveloppées, ainsi que dans sa théorie de la force centripète ; elle dont nous nous servons dans les théories du centre instan-né de rotation, de la courbure de l'enveloppe d'une courbe liée une roulette ; etc. On trouve dans les *Principes de Philoso-hie naturelle* d'excellente Géométrie infinitésimale, mais je n'y pas découvert d'Analyse infinitésimale : j'ajoute qu'à celui ui voudrait voir le calcul des fluxions dans le *Livre des Prin-pes*, on pourrait aussi bien montrer le calcul différentiel dans *Horologium.* Toutefois on trouve, comme on va le voir, dans œuvre de Newton, une véritable méthode, parfaitement prépa-e et ordonnée, tandis que les ouvrages d'Huyghens n'en con-ennent que l'hypothèse, accompagnée, il est vrai, d'applications ès réelles.

Newton débute (nous passons les définitions, axiomes et pro-ositions établies avant lui) par une série de théorèmes, qu'il tilisera plus tard, sur les premières ou dernières raisons (suivant sens dans lequel on suppose que se forment les accroissements)

on faisait dans les mêmes formules $t = -dt$, on trouverait pour les coor-onnées du mobile

$$x = -v\,dt,$$

$$y = \frac{1}{2} j\,dt^2;$$

otre axe des y passe donc bien au milieu de la corde qui joint les posi-ons du mobile aux époques dt et $-dt$, comme la flèche dont parle Newton ; t, en même temps, la tangente à la trajectoire, au point M de la figure de Newton, est bien parallèle à la corde AB.

de grandeurs géométriques qui deviennent en même tem
évanouissantes.

Dans les exemples qu'il forme, les raisons, à leurs limit
tendent vers celle d'égalité. Mais on peut toujours, lorsque
limite d'un rapport est connue, changer l'énoncé de façon
trouver l'unité pour première raison, en multipliant le conséq
par cette limite, déterminée à l'avance. Nous croyons utile
rapporter ces exemples, en nous bornant à ceux qui présent
quelque nouveauté, car Newton commence par observer as
inutilement qu'entre l'aire d'une courbe et l'aire d'un polyg
infinitésimal inscrit ou circonscrit à cette courbe, la derni
raison est celle d'égalité.

Lemme VII.

La dernière raison d'un arc de cercle à sa corde ou à sa t
gente (géométrique) est la raison d'égalité.

Lemme VIII.

Les trois triangles compris, d'une part, entre deux rayons d'
cercle, prolongés au besoin, et l'arc, la corde ou la tang
qu'ils interceptent, d'autre part, sont à la fin semblables, lo
qu'ils s'évanouissent, et leur dernière raison est la raison d'égali

Dans la pensée de Newton, ces deux lemmes s'étendent à u
courbe quelconque, pourvu qu'on lui substitue son cercle oscu
teur au point où l'arc tend à s'évanouir. Il ne le dit pas, mais
le voit dans les applications.

Lemme IX.

Si d'un point A d'une courbe on mène deux cordes AB et A

de cette courbe et un axe quelconque AX, les triangles compris entre l'axe AX, les deux cordes AB et AC et deux perpendiculaires abaissées sur AX des points B et C seront à la fin semblables, lorsque les points B et C viendront se confondre avec A.

Lemme X.

Les espaces qu'une force fait parcourir au corps sur lequel elle agit (à partir du repos), soit que cette force soit invariable, soit qu'elle varie continuellement, sont, dans le commencement du mouvement, en raison doublée du temps.

Corollaire I. — Lorsque des corps qui parcouraient des arcs semblables, dans des temps proportionnels, sont sollicités par de nouvelles forces égales et appliquées dans des directions homologues, les déviations, c'est-à-dire les distances des points où les corps sont arrivés réellement aux points où ils seraient arrivés sans l'action de ces nouvelles forces, sont comme les quarrés des temps pendant lesquels ces déviations ont été produites.

Cet énoncé est vicieux : on ne voit pas pourquoi Newton introduit plusieurs corps. Il ne s'agit en effet que du principe de la composition des mouvements dus à l'action simultanée du système de forces qui agissaient sur un point matériel et de celui que communiquerait à ce point, pris à partir du repos, la force nouvellement appliquée. Mais, si Newton ne considérait qu'un corps, il ne pourrait pas établir de proportion : il serait obligé d'arriver à la formule d'une valeur.

Trois autres corollaires, qui rentrent les uns dans les autres, ne sont pas mieux exprimés. Ils se réduisent à ceci que : la déviation est proportionnelle à la force et au quarré du temps, et

ne sont que la traduction de notre formule

$$e = \frac{1}{2} j\, dt^2,$$

puisque la déviation est le chemin que la force nouvellem introduite aurait fait parcourir au mobile, pris à partir repos.

Lemme XI.

En un point d'une courbe où la courbure est finie, la sou tendante évanouissante de l'angle de contact est, à la fin, raison doublée de la sous-tendante de l'arc.

La sous-tendante d'un arc est sa corde, et la sous-tendante l'angle de contact est la distance de la seconde extrémité de l'ar la tangente menée à l'autre extrémité.

L'énoncé signifie donc que si δ désigne la corde d'un évanouissant et y la distance de l'une des extrémités de cet ar la tangente menée à l'autre,

$$\frac{\delta^2}{y} = \text{const.}$$

En effet, si l'on désigne par R le rayon de courbure d'une cou en un de ses points, et qu'on rapporte cette courbe à la tange et à la normale en ce point, ses équations seront

$$x = \mathrm{R} \sin \omega = 2\,\mathrm{R} \sin \frac{1}{2}\omega \cos \frac{1}{2}\omega,$$

et

$$y = \mathrm{R}(1 - \cos\omega) = 2\,\mathrm{R} \sin^2 \frac{1}{2}\omega,$$

ω désignant la courbure de l'arc évanouissant considéré.

On déduit de ces formules

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\,\mathrm{R} \sin \frac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$\frac{\delta^2}{y} = 2\,\mathrm{R}.$$

Mais ce n'est pas là la démonstration de Newton, qui, nous l'avons déjà dit, n'emploie jamais aucune formule de Trigonométrie. Ses démonstrations, moins claires que celles qu'il est si facile d'y substituer, sont remarquables en ce qu'il était très facile d'y commettre quelques erreurs, tandis que les nôtres n'en comportent jamais ; mais leur contexture a cet inconvénient grave que Newton, ne cherchant pas des valeurs, a beaucoup de peine à s'exprimer clairement; ainsi il ne dit pas que $\frac{\delta^2}{y}$ a pour limite $2\,\mathrm{R}$, mais que, si l'on considère deux cordes telles que celle que nous avons supposée, la dernière raison des δ^2 sera la même que celle des y, ce qui ne signifie pas grand chose, les deux cordes étant en même temps évanouissantes, et, par conséquent, n'en formant en réalité qu'une, ou signifie simplement que $\frac{\delta^2}{y}$ a une limite ; une infinité d'énoncés de Newton sont constitués sur ce modèle vicieux, dont les Grecs n'avaient pas laissé d'exemples [1].

[1] Les singularités de l'espèce de celle dont je parle n'étant plus connues aujourd'hui, je craindrais de n'être pas compris, si je ne prenais pas un exemple.

Supposons, au hasard, qu'une inconnue y dût être représentée en fonction de x, au moyen de constantes arbitraires a, b, c, par la formule

$$y = \sqrt{\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}\,\frac{a^3 b^3}{c^4}\,x^2}.$$

Il ajoute que le théorème subsisterait si la sous-tendante de l'angle, au lieu d'être perpendiculaire à la tangente, faisait avec elle un angle donné, ou si elle tendait à un point donné. Cela est vrai, en ce sens que $\frac{\delta^2}{y}$ aurait toujours une limite finie. Cette limite serait le produit de $2R$ par le sinus de l'angle donné, ou par le sinus de l'angle formé avec la tangente par la droite qui joindrait le point donné à l'extrémité de l'arc par lequel est menée la tangente.

Nous aurions de fréquentes occasions de présenter des observations analogues aux précédentes, mais nous ne les reproduirons plus.

Si l'on ne trouve pas le moyen d'écrire cette équation, il faudra, pour la remplacer, un nombre énorme de théorèmes.

On démontrera d'abord que a, b et c restant les mêmes, deux valeurs de y ont entre elles la raison sesquiplée des valeurs de x; que b, c et x restant invariables, deux valeurs de y sont entre elles en raison des valeurs de a; que a, b et x conservant les mêmes valeurs, deux valeurs de y sont en raison réciproque de la raison doublée des valeurs de c; enfin que a, x et c restant les mêmes, deux valeurs de y sont en raison sesquiplée des valeurs de b; et, tout cela dit, on ne saura encore rien de la présence, dans la formule, de $\frac{3}{4}$, de π et de $\sqrt{2}$. Il faudra instituer un théorème *ad hoc* pour remplir cette lacune.

Si la valeur de l'inconnue y devait être composée de plusieurs parties monomes, il faudrait la décomposer d'avance, dans l'analyse concrète, préalable, de la question, et opérer de même sur chaque partie.

Nous avons déjà vu Galilée et Huyghens multiplier ainsi les énoncés pour arriver à exprimer des formules très simples. Après avoir formulé les proportions qu'il a besoin d'exprimer pour remplacer la formule du temps d'une oscillation du pendule simple,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Huyghens, afin d'introduire π, termine par cet énoncé : Le temps d'une oscillation a avec celui de la chute verticale le long du rayon du cercle, une raison égale à elle de la demi-circonférence au diamètre.

Le théorème ou lemme est suivi de plusieurs corollaires dont le seul important est que, ***lorsqu'un corps, avec une vitesse donnée, décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit.*** Ce corollaire est énoncé sans démonstration. Il arrive très souvent à Newton de placer ainsi incidemment, comme corollaires, des propositions bien plus importantes que celles dont il les fait dépendre; quant à l'énoncé de celui-ci, il doit être rectifié de la manière suivante : si l'on considère sur la trajectoire d'un mobile deux arcs évanouissants AB, AB_1, et qu'on mène, des milieux c et c_1 de leurs cordes, des perpendiculaires à ces cordes, terminées aux arcs, ou des droites également inclinées sur ces mêmes cordes, ces droites ε et ε_1 seront entre elles comme les quarrés des temps employés à décrire les arcs. En effet, elles sont comme les quarrés des cordes, ou comme les quarrés des arcs, ou enfin comme les quarrés des temps employés à parcourir ces arcs, puisque la vitesse est la même.

D'ores en avant, lorsqu'il y aura lieu, nous donnerons de suite les énoncés rectifiés.

LIVRE PREMIER.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripètes.

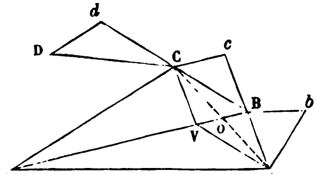
Nous arrivons aux théorèmes qui constituent les grandes découvertes de Newton en Dynamique.

Proposition I.

Théorème des aires. — Voici comment Newton démontre ce théorème : soient S le centre vers lequel tend continuellement la

force appliquée au mobile considéré, A la position de ce mobile à une époque quelconque, Ab le chemin qu'il parcourrait dans un temps très court, en vertu de sa vitesse acquise en A : le mobile étant soumis à l'action d'une force parallèle à AS sera dévié dans cette direction, et si bB est le chemin que la force lui ferait parcourir dans le temps considéré, à partir du repos, celui qu'il parcourra en réalité sera AB et l'aire décrite, ASB, sera égale à l'aire ASb qui eût été décrite en vertu de la vitesse acquise seule. Si le

Fig. 3.



mobile, étant arrivé en B, ne se mouvait plus qu'en vertu de sa vitesse acquise, il parcourrait dans la direction du prolongement de AB, dans un temps égal au précédent, un chemin Bc égal à AB, et l'aire décrite, BSc, serait égale à ASB ou à ASb; mais étant soumis à l'action d'une force dirigée suivant BS, ce mobile sera dévié de c en C parallèlement à BS; toutefois l'aire décrite BSC sera égale à BSc ou à ASb, et ainsi de suite.

Du reste la trajectoire ABCD, etc., sera évidemment plane.

Corollaire I. — Lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, sa vitesse est à chaque instant réciproquement proportionnelle à la distance du centre d'action à la tangente à la trajectoire.

Corollaire II. — Si l'on achève le parallélogramme déterminé par les cordes AB, BC de deux arcs parcourus consécutive-

ır le mobile dans des temps égaux, la diagonale BV de ce ɔgramme, à la limite, passera par le centre des forces.

llaire III. — Les diagonales telles que BV, construites :he en proche, représentent les déviations subies par le , elles sont donc proportionnelles aux intensités de la force.

dirions que $BV = \frac{1}{2} j dt^2$, j désignant la force appliquée é de masse en B et dt une des parties infinitésimales du

llaire IV. — La moitié BO de la diagonale BV est ce wton a déjà appelé la flèche de l'arc ABC. C'est la paral- . direction de la force, menée par le milieu de la corde et ;e entre ce milieu et l'arc. C'est pourquoi Newton dit : .es des arcs évanouissants parcourus en des temps égaux ıtent aussi proportionnellement les intensités de la force.

llaire V. — La force accélératrice, dans ce qui précède, force de la gravité comme la flèche de l'arc décrit est à la 'erticale de l'arc parabolique qu'un projectile décrit dans ɛ temps.

llaire VI. — Tout ce qui vient d'être dit subsisterait si dans lequel se meut le mobile et le point où tend la force plan, au lieu d'être fixes, se mouvaient uniformément en roite.

Proposition II.

la réciproque de la précédente.

Proposition III.

ı corps décrit autour d'un autre, qui se meut d'une e quelconque, des aires proportionnelles au temps, la

force qui sollicite le premier est composée d'une force qui vers le second et de la force accélératrice qui anime ce se corps.

Il serait superflu de faire remarquer l'importance de cette position capitale où se trouve introduite pour la première la considération des mouvements relatifs.

Proposition IV.

Cette proposition a trait à la force qui entretient le mouven uniforme d'un mobile dans une circonférence de cercle. Con Newton n'évalue pas l'accélération du mobile, il est obligé, a qu'Huyghens, de multiplier les énoncés, pour remplacer la c naissance de la formule $\frac{v^2}{r}$ de cette accélération.

Proposition V.

Sachant qu'un corps est soumis à l'action d'une force qui pa par un point fixe, et connaissant les vitesses de ce corps d trois de ses positions données, trouver le centre d'action. Il fa pour cela, construire le point dont les distances aux trois t gentes à la trajectoire, aux points donnés, seraient inversem proportionnelles aux trois vitesses.

Proposition VI.

Si un corps se meut sous l'action d'une force dirigée vers point fixe, que l'on considère un arc parcouru dans un ten très court et qu'on imagine la flèche de cet arc, menée pa milieu de la corde et dirigée vers le centre d'action, la fc accélératrice, au point milieu de l'arc (ou en un point quelcon

de cet arc) sera proportionnelle à cette flèche et en raison doublée inverse du temps employé à parcourir l'arc.

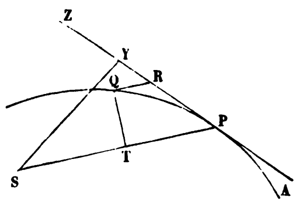
En effet, la flèche considérée étant la déviation produite dans la moitié du temps employé, le théorème rentre dans l'un des précédents et ne constitue qu'une traduction nouvelle de notre formule moderne

$$f = \frac{1}{2} j \left(\frac{dt}{2}\right)^2,$$

où f représente la flèche et dt le temps employé à parcourir l'arc entier.

Corollaires I et II. — Soient APQ (*fig.* 4) la trajectoire d'un

Fig. 4.



mobile soumis à l'action d'une force centrale dirigée vers S, P un point quelconque de cette trajectoire, PZ la tangente en P, Q un point infiniment voisin de P, QR la parallèle à SP, qui représente la déviation de P en Q, enfin QT et SY des perpendiculaires abaissées de Q et de S sur SP et PZ : Newton dit que la force appliquée au mobile en P est réciproquement proportionnelle à

$$\frac{\overline{SP}^2 . \overline{QT}^2}{QR} \quad \text{ou à} \quad \frac{\overline{SY}^2 . \overline{QP}^2}{QR}.$$

En effet, QR est la flèche de l'arc double de PQ ; et d'un autre

côté, le temps employé à parcourir l'arc PQ est proportionne
l'aire décrite SPQ, qui se mesure indifféremment par $\frac{1}{2}$SP.(
ou par $\frac{1}{2}$SY.QP.

Nous dirions plus simplement

$$j = \frac{2f}{dt^2},$$

f désignant la flèche ou la déviation RQ, et dt le temps emplo
par le mobile pour aller de P en Q; représentant donc par
l'aire décrite dans l'unité de temps, de sorte que SP.QT
SY.QP auraient pour valeur commune

$$2k^2 dt,$$

nous remplacerions dt par $\frac{\mathrm{SP.QT}}{2k^2}$ ou par $\frac{\mathrm{SY.QP}}{2k^2}$, ce qui do
nerait

$$j = \frac{8k^4 f}{\overline{\mathrm{SP}}^2 . \overline{\mathrm{QT}}^2} = \frac{8k^4 f}{\overline{\mathrm{SY}}^2 . \overline{\mathrm{QP}}^2}.$$

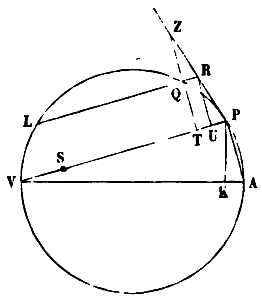
Cette proposition est la plus importante de toute la théor
elle fournira très simplement, comme on va le voir, la valeur
l'intensité de la force, lorsque la trajectoire sera donnée, ai
que le centre d'action S.

Proposition VII.

Trouver la force, dirigée vers un point fixe, qui fait parcou
à un mobile une circonférence de cercle. Soient S (*fig.* 5)
point fixe, APQLV la circonférence de cercle que décrit le m

bile, P la position actuelle de ce mobile, PSV la corde du cercle joignant les deux points P et S, AV le diamètre passant par la seconde extrémité V de cette corde, Q une position du mobile infiniment voisine de P, QL la corde menée par Q parallèlement à PV, R le point de rencontre de cette corde prolongée avec la tangente à la trajectoire en P, enfin QT la perpendiculaire

Fig. 5.



abaissée de Q sur SP, RU la parallèle à QT et PK la perpendiculaire abaissée de P sur AV : la force cherchée est, comme on l'a vu,

$$j = \frac{8k^4.QR}{\overline{SP}^2.\overline{QT}^2},$$

k^2 dépendant de la vitesse et de la position initiales du mobile (nous aimons mieux donner sa valeur que de dire comme Newton qu'elle est proportionnelle à $\frac{QR}{\overline{SP}^2.\overline{QT}^2}$); il s'agit de donner une autre forme au quotient $\frac{QR}{\overline{QT}^2}$, car $\overline{SP}^2$ doit rester

dans l'expression de la force. Or

$$QR.RL = \overline{RP}^2,$$

d'où

$$QR = \frac{\overline{RP}^2}{RL};$$

d'un autre côté les triangles semblables RUP et VPA donnent

$$\frac{\overline{RU}^2}{\overline{RP}^2} = \frac{\overline{VP}^2}{\overline{AV}^2},$$

d'où

$$\overline{RU}^2 = \overline{QT} = \frac{\overline{RP}^2.\overline{VP}^2}{\overline{AV}^2} = \frac{\overline{RP}^2.\overline{VP}^2}{4R^2},$$

R désignant le rayon du cercle. Par conséquent

$$\frac{QR}{\overline{QT}^2} = \frac{4R^2}{RL.\overline{VP}^2} = \frac{4R^2}{\overline{VP}^3},$$

puisque RL tend à se confondre avec VP. Donc, en résumé, l'a-célération, ou la force accélératrice cherchée, est

$$\frac{32k^4 R^2}{\overline{SP}^2.\overline{VP}^3}.$$

Elle varie en raison inverse du quarré de la distance du mob au point fixe et du cube de la corde de la trajectoire circulai qui passe par le mobile et le point fixe.

La démonstration de Newton est beaucoup plus obscure pa que, au lieu du triangle RUP, il considère le triangle ZTP.

Si le point donné S était sur la circonférence, VP se conf drait avec SP et alors la force accélératrice varierait en rais

inverse de la cinquième puissance de la distance du mobile au centre d'action.

Proposition VIII.

Newton se propose la même question relativement à une trajectoire circulaire, mais en supposant le centre S d'action à une distance infinie.

Dans cette hypothèse, SP serait infini, et si le mouvement avait lieu avec une vitesse finie, k serait aussi infini. Soit v_0 la vitesse du mobile à l'extrémité du diamètre dirigé vers le point S, k^2 aurait pour valeur

$$\frac{1}{2}v_0\,\mathrm{SP};$$

et par suite l'expression de la force accélératrice deviendrait

$$8\,\frac{v_0^2\,\mathrm{R}^2}{\overline{\mathrm{VP}}^3}.$$

Cette force varierait donc en raison inverse du cube de la corde VP parallèle à la direction dans laquelle se serait éloigné le point S.

Proposition IX.

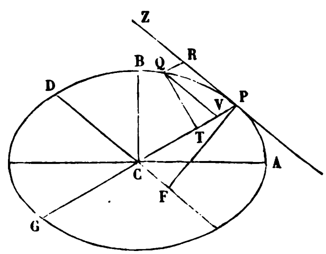
Newton suppose que la trajectoire est une spirale logarithmique et que le centre d'action est au point asymptote de la spirale. Il trouve que la force centripète est réciproquement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre.

Proposition X.

Trouver la force qui fait parcourir une ellipse à un mobile, cette force étant supposée dirigée vers le centre de l'ellipse.

Soient (*fig.* 6) CA, CB les deux axes de l'ellipse, P une position du mobile, CD le demi-diamètre conjugué de CP, Q une position du mobile infiniment voisine de P, PZ la tangente en P, QR et

Fig. 6.



QV parallèles respectivement à CP et DC, QT et PF perpendiculaires à CP et DC :

L'intensité de la force cherchée est représentée par

$$\frac{8k^4 \mathrm{QR}}{\overline{\mathrm{CP}}^2 . \overline{\mathrm{QT}}^2}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{PV}.\mathrm{VG}}{\overline{\mathrm{QV}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2},$$

d'où

$$\mathrm{PV} = \mathrm{QR} = \frac{\overline{\mathrm{CP}}^2 . \overline{\mathrm{QV}}^2}{\mathrm{VG}.\overline{\mathrm{CD}}^2};$$

d'un autre côté les deux triangles semblables QVT et PCF donnent

$$\frac{\overline{\mathrm{QV}}^2}{\overline{\mathrm{QT}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{PF}}^2},$$

d'où

$$\overline{QV}^2 = \frac{\overline{QT}^2 . \overline{CP}^2}{\overline{PF}^2},$$

et, en substituant,

$$QR = \frac{\overline{CP}^4 . \overline{QT}^2}{VG . \overline{CD}^2 . \overline{PF}^2},$$

d'où, par conséquent,

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2 . \overline{QT}^2} = \frac{\overline{CP}^2}{VG . \overline{CD}^2 . \overline{PF}^2};$$

mais VG, à la limite, tend vers 2 CP, donc

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2 . \overline{QT}^2} \quad \text{se réduit à} \quad \frac{CP}{2\overline{CD}^2 . \overline{PF}^2}.$$

Mais CD $\times$ PF est l'aire du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués CP et CD, ou ab, en désignant par a et b les deux demi-axes, donc

$$\frac{QR}{\overline{CP}^2 . \overline{QT}^2} = \frac{CP}{2a^2b^2}$$

et

$$j = \frac{8k^4}{2a^2b^2} CP = \frac{4k^4}{a^2b^2} CP.$$

Ainsi, comme le dit Newton, la force accélératrice, dans ce cas, est proportionnelle à la distance.

Si, comme Newton le remarque, l'ellipse dégénérait en parabole, la force serait constante, et l'on retomberait dans le cas traité par Galilée.

TROISIÈME SECTION.

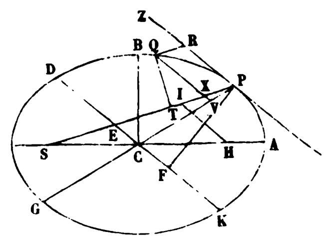
Du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques.

Proposition XI.

Trouver la force qui fait parcourir une ellipse à un mob
en supposant cette force dirigée vers l'un des foyers.

Soient (*fig.* 7) APQ ... la trajectoire elliptique considér
dont les demi-axes sont CA et CB, S le foyer vers lequel

Fig. 7.



la force appliquée au mobile, H l'autre foyer, P une position
mobile, Q la position infiniment voisine, PZ la tangente
P, QR et QT la parallèle et la perpendiculaire à SP :

La force cherchée est toujours représentée par

$$\frac{8k^4 . QR}{\overline{SP}^2 . QT^2}.$$

Soient CD le diamètre conjugué de CP, QV l'ordonnée du p
Q, au diamètre CP, X le point de rencontre de QV et de SP,
une parallèle à la tangente en P et E le point d'intersection
SP et de CD :

$$QR = XP;$$

'un autre côté, à cause des triangles semblables XPV et EPC,

$$XP : VP :: EP : CP,$$

ıais le point E est le milieu de SI, puisque CE est parallèle à II et que le point C est le milieu de SH; donc

$$EP = \frac{SP + IP}{2} = \frac{SP + PH}{2} = CA,$$

ır

$$PH = PI;$$

›nc

$$QR = XP = \frac{VP . CA}{CP}.$$

'ailleurs, si l'on abaisse PF perpendiculaire à DCK, les deux angles QTX et EPF seront semblables et donneront

$$QX : QT :: PE : PF,$$

›ù

$$QT = \frac{QX . PF}{PE} = \frac{QX . PF}{CA}.$$

Mais QX tend vers QV (cela est vrai parce que XV est de ême ordre que XP ou QR, et que QR est infiniment ›tit par rapport à QX, mais Newton ne donne aucune raison); ›nc

$$QT = \frac{QV . PF}{CA};$$

ıfin

$$\overline{QV}^2 = VP . GP \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2};$$

par conséquent

$$\overline{QT}^2 = \frac{VP.GP\,\dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2}}{\overline{CA}^2}\,\overline{PF}^2,$$

ou, puisque GP se réduit à 2 CP,

$$QT^2 = \frac{2\,VP.\overline{CD}^2}{CP.CA}\,\overline{PF}^2.$$

En remplaçant QR et $\overline{QT}^2$ par les valeurs qu'on vient de trou
dans l'expression de la force

$$\frac{8k^4 QR}{\overline{SP}^2.\overline{QT}^2},$$

il vient

$$8k^4\,\frac{VP.CA}{CP.\overline{SP}^2\,\dfrac{2VP.\overline{CD}^2}{CP.CA}\,\overline{PF}^2} = 4\,k^4\,\frac{\overline{CA}^3}{\overline{CD}^2.\overline{PF}^2}\,\frac{1}{\overline{SP}^2}.$$

Mais

$$\overline{PF}^2.\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2.\overline{CB}^2;$$

donc enfin la force accélératrice est

$$j = 4\,k^4\,\frac{1}{\dfrac{\overline{CB}^2}{CA}}\,\frac{1}{SP^2} = 8\,k^4\,\frac{1}{L}\,\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{8k^4}{L.\overline{SP}^2},$$

L désignant le paramètre $2\,\dfrac{\overline{CB}^2}{CA}$ de l'ellipse. La force qui agit
le mobile varie donc en raison inverse du quarré de sa dist
au centre d'action.

Proposition XII et XIII.

Théorèmes analogues relativement à des trajectoires hyperboiques ou paraboliques.

Proposition XIV.

Si plusieurs corps sont soumis à des forces accélératrices lirigées vers un même point et qui varient en raison inverse des uarrés des distances, les paramètres de leurs orbes seront en aison doublée des aires qu'ils décrivent en temps égal.

En effet, on vient de trouver, pour une quelconque des trajecoires,

$$j = \frac{8k^4}{L.\overline{SP}^2},$$

ais on suppose $j.\overline{SP}^2$ constant non seulement pour chaque obile, mais d'un mobile à un autre, donc

$$\frac{k^4}{L} = \text{constante.}$$

a démonstration de Newton est naturellement un peu plus ngue, parce qu'il n'a pas cherché l'expression de la force accératrice.

Corollaire. — L'aire entière de la trajectoire (elliptique) est en ison composée de la raison sous-double du paramètre et de la ison du temps périodique. C'est-à-dire, en appelant a et b, a' et les demi-axes de deux orbes elliptiques, ω et ω' les temps des volutions des mobiles dans ces deux orbes, L et L′ les deux ramètres,

$$\frac{ab}{a'b'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{\omega}{\omega'}.$$

En effet

$$\omega k^2 = \pi ab \text{ et } \omega' k'^2 = \pi a' b',$$

d'où

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\omega k^2}{\omega' k'^2},$$

mais,

$$\frac{k^2}{\sqrt{L}} = \frac{k'^2}{\sqrt{L'}} \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{k'^2} = \sqrt{\frac{L}{L'}}$$

donc

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\omega}{\omega'}\sqrt{\frac{L}{L'}}.$$

Proposition XV.

Les hypothèses restant les mêmes, les temps des révolutic sont entre eux en raison sesquiplée des grands axes (c'est-à-d les quarrés des temps des révolutions sont comme les cubes c grands axes des orbites).

En effet

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{ab}{\sqrt{L}} : \frac{a'b'}{\sqrt{L}},$$

mais $L = \frac{2b^2}{a}$ et $L' = \frac{2b'^2}{a'}$, donc

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}}.$$

Les démonstrations de Newton sont naturellement un p pénibles, parce qu'il ne pose jamais aucune égalité, mais no n'en changeons que la forme.

Proposition XVI.

Dans les mêmes hypothèses, si l'on mène les tangentes à deux trajectoires, en deux points quelconques, et que du foyer commun on abaisse des perpendiculaires sur ces tangentes, les vitesses des deux mobiles lorsqu'ils passeront aux points considérés seront entre elles en raison composée de la raison sous-doublée des paramètres et de la raison inverse de celle des perpendiculaires.

C'est-à-dire, en désignant par v et v' les deux vitesses, et par p et p' les distances au foyer commun des deux tangentes suivant lesquelles elles sont dirigées,

$$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{p'}{p}.$$

En effet

$$vp=k^2 \text{ et } v'p'=k'^2,$$

donc

$$\frac{v}{v'}=\frac{k^2}{k'^2}\,\frac{p'}{p};$$

mais

$$\frac{k^2}{k'^2}=\sqrt{\frac{L}{L'}},$$

donc

$$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{p'}{p}.$$

Corollaire I.

$$\frac{L}{L'}=\frac{v^2}{v'^2}\,\frac{p^2}{p'^2}.$$

Corollaire II. — **Aux sommets situés** sur les axes focaux,

p et p' se confondent avec SP et SP′. Donc

$$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{L}{L'}}\,\frac{d'}{d},$$

en appelant d et d' les deux distances.

Corollaire III. — Si l'une des ellipses était un cercle (ayant son centre au foyer commun), et si ce cercle touchait l'une des ellipses à l'une des extrémités de son axe focal, les vitesses des deux mobiles, au point de contact, seraient entre elles comme

$$\sqrt{L}:\sqrt{L'}$$

ou comme

$$\sqrt{2\frac{b^2}{a}}:\sqrt{2R},$$

ou enfin comme

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}}:\sqrt{R},$$

R désignant l'une des distances $a\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

L'intérêt que Newton attache à cette remarque tient à ce que la relation de la vitesse à l'accélération, dans un cercle, étant supposée mieux étudiée que dans une trajectoire quelconque, et l'accélération étant la même, dans l'espèce, au point de contact de l'ellipse et du cercle considérés, on pourra déduire la vitesse dans l'ellipse, à l'une des extrémités de l'axe focal, de la vitesse dans le cercle.

Newton ne se serait pas embarrassé de cette remarque, ni de beaucoup d'autres analogues, si, au lieu de rapports, il avait établi des égalités. Il ne donne même pas la formule relative au cercle

$$j=\frac{v^2}{R}.$$

Corollaire IV. — Si l'on considère deux des corps aux moments où ils passent par les extrémités des petits axes de leurs orbes,

$$p = b \text{ et } p' = b',$$

et la relation

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\frac{p'}{p}$$

devient alors

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}\frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{b^2 a'}{b'^2 a}}\frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{a'}{a}} = \sqrt{\frac{d'}{d}},$$

d et d' désignant les distances des deux mobiles au centre d'action.

Corollaire V. — Si les paramètres de deux trajectoires sont égaux, à ces mêmes moments

$$vp = v'p',$$

mais d'ailleurs chacun des produits est constant.

Proposition XVII.

Un mobile soumis à l'action d'une force dirigée vers un point fixe, et qui varie en raison inverse du quarré de la distance, décrit une conique dont le point fixe occupe l'un des foyers. Nous passons cette réciproque.

QUATRIÈME ET CINQUIÈME SECTIONS.

De la détermination des orbes elliptiques, paraboliques et hyperboliques, 1° lorsque l'un des foyers est donné; 2° lorsqu'on ne donne ni l'un ni l'autre.

Newton s'occupe, dans ces deux sections, de la construction d'une conique dans des conditions diverses. Les questions qu'il

traite ne sont naturellement pas toutes nouvelles; nous en supposerons les solutions connues, lorsqu'elles devront être utilisées.

SIXIÈME SECTION.

De la détermination des mouvements dans des orbes donnés.

Newton passe à la solution approchée du problème, capital en Astronomie, de déterminer la position du mobile qui décrit une conique, dans les conditions supposées précédemment, connaissant, par exemple, le temps écoulé depuis le passage de ce mobile au sommet le plus voisin du foyer vers lequel tend la force qui lui est appliquée.

Il s'agit de diviser l'aire de la trajectoire en secteurs égaux ayant pour sommet commun le foyer, mais la question ne peut être résolue exactement que dans le cas d'une trajectoire parabolique, puisque la parabole est la seule des trois coniques qui soit quarrable algébriquement.

Voici la solution que Newton donne pour ce cas :

Soient (*fig.* 8) S le foyer de la parabole, A son sommet, G le milieu de AS, $4AS \times M$ l'aire que le rayon vecteur du mobile a dû décrire dans le temps donné, depuis son passage en A : il s'agit de trouver le point P où le mobile est parvenu. Pour cela on élèvera à AS, en G, une perpendiculaire, sur laquelle on prendra GH égale à 3 M, et du point H comme centre on décrira le cercle SP.

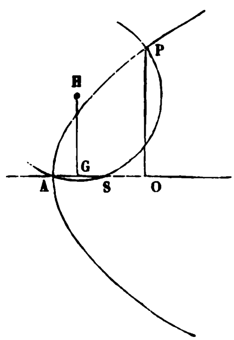
Ce théorème est facile à vérifier, car abaissant PO perpendiculaire à l'axe et tirant PH, on aura

$$\begin{aligned}\overline{AG}^2 + \overline{GH}^2 = \overline{HP}^2 & \\ &= (AO - AG)^2 + (PO - HG)^2 \\ &= \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 - 2AG.AO - 2GH.PO + \overline{AG}^2 + \overline{GH}\end{aligned}$$

$$2\,GH.PO = \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 - 2\,AG.AO$$
$$= \overline{AO}^2 - \frac{3}{4}\,\overline{PO}^2.$$

ivant ensuite $AO \times \dfrac{\overline{PO}^2}{4\,AS}$ au lieu de $\overline{AO}^2$, divisant tous les

Fig. 8.



es par $3\,PO$ et les multipliant par $2\,AS$, on aura

$$\frac{4}{3}\,GH.AS = \frac{1}{6}\,AO.PO + \frac{1}{2}\,AS.PO$$
$$= \frac{AO + 3\,AS}{6}\,PO$$
$$= \frac{4\,AO - 3\,SO}{6}\,PO$$
$$= \text{aire } APO - \text{aire } SPO$$
$$= \text{aire } APS,$$

mais, à cause que $GH = 3M$, on a

$$\frac{4}{3} GH.AS = 4AS.M.$$

Donc l'aire APS est bien égale à $4AS.M$.

C'est à peu près sur ce modèle que sont faites toutes les démonstrations de Newton. On peut juger par cet exemple s'il est facile de les suivre. Du reste, la construction, qu'il faudrait effectuer dans le ciel, ne sera pas d'une grande utilité.

Newton paraît au désespoir de ne pouvoir rien trouver d'analogue pour le cas d'une orbite elliptique, il en donne du reste une explication très remarquable : La portion de l'aire d'une ovale quelconque, comprise entre un rayon vecteur fixe et un autre mobile, « ne peut pas, dit-il, être trouvée par une équation composée d'un nombre fini de termes », parce que cette aire pourrait être augmentée d'un nombre quelconque de fois l'aire entière de l'ovale sans que la position du rayon vecteur mobile changeât; de sorte que l'équation qui lierait l'abscisse, par exemple, de l'extrémité de ce rayon vecteur, et l'aire du secteur, aurait une infinité de racines, si l'on y considérait l'aire comme l'inconnue.

C'est évident, et j'ajoute que cette remarque, à laquelle, bien entendu, Newton ne pouvait attacher une telle importance, contient en germe la notion fondamentale la plus naturelle des périodes des intégrales.

Mais je remarque que Newton devrait avoir aussi bien en vue l'hyperbole que l'ellipse, et que l'hyperbole n'ayant rien de l'ovale (à moins qu'on n'en considère les conjuguées elliptiques) son raisonnement ne lui est pas du tout applicable, quoique la difficulté soit la même, ce qui deviendrait évident si l'on cher-

ıit à exprimer les aires des secteurs des deux courbes au moyen ; fonctions trigonométriques. Mais Newton n'aime pas la igonométrie.

Nous ne reproduisons pas les diverses solutions qu'il donne du oblème, parce que, tout ingénieuses et remarquables qu'elles nt, elles n'auraient plus de valeur aujourd'hui. Nous nous borns à dire que, dans l'une d'elles, il fait intervenir une cycloïde ur la construction du point cherché, où doit se trouver le obile.

SEPTIÈME SECTION.

De l'ascension et de la descente rectilignes des corps.

Newton aborde ici la question du mouvement rectiligne d'un int soumis, à partir du repos, à l'action d'une force variant en son inverse du quarré de la distance à un point fixe.

La solution qu'il en donne paraîtrait fournir une preuve bien ficile à réfuter contre l'hypothèse qu'il fût en possession du cul des fluxions lorsqu'il écrivait ce Chapitre, car il était bien ile de traiter analytiquement le problème. Cette solution et utres analogues ont été en effet invoquées par les partisans de ibniz, notamment par Bernoulli, pour contester à Newton ses oits à l'invention, sans secours étranger, du calcul des fluxions. ais nous savons que cette contestation n'était pas fondée.

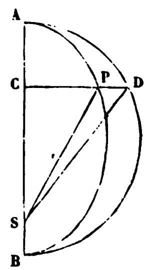
Quoi qu'il en soit, voici à quel biais Newton a recours :

Soient A (*fig.* 9) le point d'où le mobile part sans vitesse, et e centre d'attraction; si ce mobile avait eu en A une vitesse hoontale, il aurait parcouru une certaine conique ayant son foyer S. Supposons d'abord que cette conique soit une ellipse APB,

décrivons sur son grand axe le demi-cercle ADB et menons
SP et SD : l'aire ASP sera proportionnelle au temps, mais
est la projection de ASD sous un angle fixe, donc l'aire ASD
aussi proportionnelle au temps.

Cela posé, supposons que l'ellipse APB s'aplatisse ind
ment, son grand axe AB restant constant, mais, par cons

Fig. 9.



foyer S se transportant en B, l'aire ASD deviendra ABD,
n'en restera pas moins proportionnelle au temps.

En construisant donc le point D, d'après le temps écoul
menant DC perpendiculaire à AB, on aurait la position
serait parvenu le mobile, dans le même temps.

Newton examine ensuite les cas où la conique AP serait
hyperbole ou une parabole. On ne voit pas trop pourquoi.
qu'il en soit, il imagine, suivant le cas, soit une hyperbole
latère, soit une parabole invariable, pour remplir l'office
cercle employé précédemment.

Mais ni le cercle, ni l'hyperbole équilatère, ni la parabole
riable ne pouvaient évidemment fournir une solution satis
sante, et cela pour bien des raisons qu'il est inutile de

r. Aussi Newton transforme-t-il encore la question. ıus ne voulons pas le suivre dans tous les détails où il entre, : qu'au lieu de six grandes pages *in quarto* qu'il y emploie, il udrait bien au moins douze, pour arriver à quelque clarté, Iewton supprime la moitié des explications qui seraient ısaires; mais nous reproduirons la solution définitive à :lle il arrive, parce qu'elle est intéressante au point de vue rique.

ici la règle telle que Newton l'énonce :

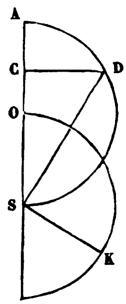
'uper diametro AS, *distantiâ corporis a centro sub initio, ibe circulum* ADS, *ut et huic æqualem semicirculum* OKH *centrum* S. *De corporis loco quovis* C *erige ordinatim catam* CD, *junge* SD *et areæ* ASD *æqualem constitue sec-* : OSK. *Patet per Propositionem XXXV quod corpus ca-* › *describet spatium* AC *eodem tempore quo corpus aliud, rmiter circa centrum* S *gyrando, describere potest arcum* ›

st-à-dire : Sur la distance initiale AS du corps au centre on, décrivez la demi-circonférence ADS, et une demi-ıférence égale, du point S comme centre (*fig.* 10); d'un point onque C de la ligne que décrit le mobile, élevez la perpendi-e CD; joignez SD et formez l'aire OSK égale à l'aire ASD : il ident par la Proposition XXXV que le corps décrira l'espace ans le même temps qu'un autre mobile pourrait mettre à urir l'arc OK, en tournant autour du point S d'un mouve-uniforme.

remarquera que cet énoncé contient une devinette, car :on ne dit pas avec quelle vitesse le second mobile décrit OK. Mais les mots *gyrando*, *uniformiter* et surtout *potest*

permettent de trouver le mot de l'énigme : comme le temp
dant lequel un mobile *peut* parcourir un arc de cercle do
absolument indéterminé, *potest* indique que le second mob
soumis à l'action d'une force, supposée connue, et dirigée
D'un autre côté, il est à présumer que cette force doit avoir q
rapport avec celle qui agit sur le premier mobile, avec cette

Fig. 10.



rence qu'elle soit constante. Ce doit donc être l'attraction e
par le point S sur ce premier mobile à une certaine distance
quelle doit être cette distance? j'avouerai que j'ai mieux ai
mettre en équation que de lire entièrement la démonstrati
Newton.

Mais commençons par résoudre analytiquement le probl
Soient x la distance du mobile au point S, à l'époque t, co
à partir du départ en A, et $\frac{k^3}{x^2}$ la force appliquée au mo
cette époque: la fluxion de la vitesse est donc $-\frac{k^3}{x^2}$, c'est-à-dir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^3}{x^2};$$

:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=-2\frac{k^3}{x^2}\frac{dx}{dt},$$

n prenant les fluentes des deux membres,

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2k^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right),$$

signant la distance AS.

en résulte, pour la fluxion du temps par rapport à l'abscisse,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2k^3}}\sqrt{\frac{ax}{a-x}};$$

: s'agissait donc que de trouver la fluente de

$$\sqrt{\frac{ax}{a-x}},$$

Newton a fait des choses plus difficiles dans plusieurs de ceux es ouvrages que nous avons analysés plus haut, mais qui été publiés postérieurement au *Livre des Principes*.

uoi qu'il en soit, traduisons maintenant en formule la solution l donne, en suppléant au mot qui manque, c'est-à-dire en gnant par une constante inconnue z la distance dont il a été ition plus haut : l'aire ASD, composée de AOD et de ODS, eprésentée par

$$\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\arccos\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{ax}{4}};$$

par conséquent l'arc OK est défini par l'équation

$$\frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\text{arc OK} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{4}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4}\,a\sqrt{x(a-x)}$$

d'où

$$\text{arc OK} = \frac{a}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)}.$$

Mais, si t est le temps employé par le second mobile pou[r par]courir l'arc OK, et que la vitesse du mouvement de ce se[cond] mobile soit celle qui, dans le cercle de rayon $\frac{a}{2}$, correspond à l'ac[]célération centripète $\frac{k^3}{z^2}$, laquelle vitesse est déterminée par l'é[qua]tion

$$\frac{v^2}{\frac{a}{2}} = \frac{k^3}{z^2},$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}},$$

l'arc OK doit être égal à

$$t\sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}};$$

le temps t, que l'on cherche, doit donc être fourni par l'équa[tion]

$$t\sqrt{\frac{k^3 a}{2z^2}} = \frac{a}{2}\,\text{arc cos}\,\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)},$$

$$t = \sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\left[\frac{a}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} + \sqrt{x(a-x)}\right];$$

ι autre côté, la fluxion de t par rapport à x doit être, comme 'a vu plus haut,

$$-\frac{1}{\sqrt{2k^3}}\sqrt{\frac{ax}{a-x}}.$$

:ette fluxion, fournie par la formule précédente, serait

$$\sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\left[\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^2}} + \frac{a-2x}{2\sqrt{x(a-x)}}\right]$$

:-à-dire

$$\sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\left[\frac{a-2x}{2\sqrt{x(a-x)}} - \frac{x}{2\sqrt{x(a-x)}}\right],$$

implement

$$-\sqrt{\frac{2z^2}{k^3a}}\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

ut donc poser

$$-\frac{1}{\sqrt{2k^3}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2z^2}{k^3}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4z^2}{2k^3}},$$

$$a^2 = 4z^2,$$

t-à-dire

$$z = \frac{a}{2}.$$

Ainsi, ce que voulait dire Newton était que *le temps empl*
par le premier mobile, pour aller de A *en* C, *serait celui q*
second mobile, sollicité vers le point S *par une force ég*
$\frac{k^3}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, *c'est-à-dire par la force correspondant à la distan*

mettrait à parcourir l'arc OK.

On voit qu'il n'est pas toujours facile de lire l'illustre au
du *Livre des Principes*.

La marquise Du Châtelet s'est bornée sur ce point à re
duire l'énoncé de Newton; voici ce qu'elle dit : « Sur le diam
AS, distance du corps au centre, dans le commencement d
chute, décrivez le demi-cercle ADS, ainsi que le demi-c
OKH, qui lui est égal, et qui est décrit autour du centre S. D
lieu quelconque C du corps, élevez l'ordonnée CD, et faits
secteur OSK égal à l'aire ASD, il est clair, par la Proposition XX
que le corps, en tombant par AC, emploiera le même temps q
faudrait à un autre corps pour décrire l'arc OK, en tourn
uniformément autour du centre S. »

Je ne puis m'empêcher de faire cette autre remarque su
solution qui précède : Si Newton avait découvert par les moy
qu'il indique la règle à laquelle il est parvenu, on ne saurait t
admirer un tel effort, l'intégration géométrique de

$$dx\sqrt{\frac{ax}{a-x}}$$

dépassant en difficultés tout ce qu'a fait Pascal. Mais si, com
cela est certain, il était déjà en possession du calcul des flux
et des fluentes, lorsqu'il écrivait son *Livre des Principes*,
qu'ayant obtenu analytiquement la solution dont il s'agit, il

rché, ce qui n'était plus difficile, à y adapter une solution ›métrique, loin de le louer, il faudra le blâmer énergiquent.

Au reste, il y a lieu aussi d'admirer l'étroitesse d'esprit qui a fait préférer la maigre gloriole d'étonner le public à la gloire nense de fonder le calcul intégral.

Newton passe de là au problème du mouvement rectiligne 1 mobile attiré vers un point fixe par une force variant suit une loi quelconque, *en supposant la quadrature des rbes*, c'est-à-dire en supposant levées d'avance les plus ıdes difficultés.

HUITIÈME SECTION.

De la détermination des orbes que décrivent des corps sollicités par des forces centripètes quelconques.

:i vient la question du mouvement curviligne d'un mobile né d'abord d'une vitesse quelconque et soumis à une force gée vers un point fixe, mais variant suivant une loi quelque, *en supposant la quadrature des courbes.*

ous trouvons là, au milieu d'une solution confuse, que s ne rapportons naturellement pas, le plus ancien exemple ait, croyons-nous, été donné du théorème des forces vives, en ›rs du cas de la pesanteur.

Proposition XL.

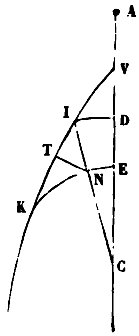
i deux corps soumis à la même force, dirigée vers le même ıt, parcourent des trajectoires différentes, et qu'ils aient eu à époques quelconques des vitesses égales, à la même distance

du centre d'attraction, ils auront toujours la même vitess
même distance de ce point.

Newton suppose l'une des trajectoires rectiligne, mais
indifférent.

Soient C (*fig.* 11) le centre d'attraction, A le point de
du corps qui suit la ligne droite, V celui du corps qui suit
trajectoire courbe VIK : Supposons qu'aux points D e
situés à la même distance de C, les deux corps aient la

Fig. 11.



vitesse et considérons deux autres positions infiniment
sines E et K de ces deux corps, à une même distance
point C. En D et I les deux mobiles sont soumis à
forces égales dirigées l'une suivant DC, l'autre suivant IC
qu'on peut représenter proportionnellement par DE et IN.
l'on mène NT normale à IK, la force IN pourra se décomp
en deux, IT et TN, mais la force TN n'influera pas sur la vit
du second mobile, dont l'accélération tangentielle sera due se
ment à l'action de la force IT.

Cela posé, les accroissements des vitesses des deux mobiles, d

temps égaux, seraient proportionnelles à DE et à IT; mais deux mobiles ne mettront pas le même temps à parcourir l'un hemin DE et l'autre le chemin IK, puisqu'ils sont supposés ir même vitesse en D et en I et que les chemins DE et IK ne t pas égaux. Ces temps seront dans la raison de DE à IK. ccroissement de vitesse de I en K sera donc à l'accroissement vitesse de D en E dans la raison composée des raisons

$$\frac{IT}{DE} \text{ et } \frac{IK}{DE},$$

is

$$\overline{DE}^2 = \overline{IN}^2 = IT.IK,$$

riangle INK étant rectangle en N; les vitesses croîtront donc ant l'une que l'autre.

Nous dirions aujourd'hui : les travaux des deux forces sont ux ainsi que les vitesses initiales, il en est donc de même des esses finales. Ces travaux sont φ.DE et φ.IN, φ désignant la ce.

NEUVIÈME SECTION.

mouvement des corps dans les orbes mobiles et du mouvement des apsides.

Newton cherche à évaluer (proportionnellement) la force pliquée à un mobile qui décrit autour du centre d'action une ite (elliptique) qui tourne elle-même autour de ce centre : compare la force qui ferait parcourir au mobile son orbite, posée fixe, à celle qui lui fait parcourir son orbite *révolvante;* cherche la différence de ces deux forces.

Soient VPK (*fig.* 12) l'orbite fixe et *up*K l'orbite révolvante, ale; ces deux orbites sont supposées parcourues suivant la

[illegible]

mouvement composé du second modèle [illegible] et elle ne s'éloigne pas trop des conditions observées dans les phénomènes astronomiques, toutes les orbites étant à très peu près circulaires et les mouvements presque uniformes.

Soient α l'angle variable VCP et $n\alpha$ l'angle $VC\mu$. VCp est donc égal à $(1-n)\alpha = n'\alpha$. Le mouvement angulaire de CP dans un temps dt, est $\frac{d\alpha}{dt}dt$ et l'aire infiniment petite décrite par CP dans le même temps est

$$\frac{1}{2}\overline{CP}^2\frac{d\alpha}{dt}dt;$$

quant au mouvement angulaire de Cp dans l'espace, il est $n'\frac{d\alpha}{dt}dt$ et l'aire infiniment petite décrite dans le même temps

$$\frac{1}{2}\,\overline{Cp}^2\,n'\,\frac{d\alpha}{dt}\,dt;$$

~

$$Cp^2 = \overline{CP}^2,$$

les aires infiniment petites décrites dans le même temps dt
entre elles dans le rapport constant $\frac{1}{n'}$; donc il en est de même
ires décrites dans un temps quelconque; et, puisque l'aire
te par CP est proportionnelle au temps, il en est de même de
décrite par Cp dans l'espace. Donc la force appliquée au
le p est encore dirigée vers le point C. Mais, dans son mou-
nt relatif le long de l'ellipse *upk*, supposée immobile, le
p serait soumis à la même force que P, donc la différence
ɜux forces est celle qui entretiendrait le mouvement de révo-
ı du point p.

wton calcule cette dernière force au moyen du théorème
yghens et trouve qu'elle est inversement proportionnelle au
de Cp ou de CP; la démonstration qu'il donne est presque
:lligible; mais elle revient à ces quelques mots très simples :

est la vitesse angulaire du mouvement de rotation de
:e *upk*, et par conséquent du rayon Cp considéré comme
ans cette orbite, mais comme entraîné avec elle. La force
pète qui retiendrait le point p dans la trajectoire circulaire
lécrirait par suite de cette révolution, serait

$$\frac{v^2}{Cp} = \frac{Cp^2\left(n\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{Cp} = Cp\left(n\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

mais, si C est l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon CP,

$$\frac{1}{2}\overline{CP}^2\frac{d\alpha}{dt} = C,$$

par conséquent

$$\left(n\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{4n^2C^2}{\overline{Cp}^4};$$

la force cherchée est donc

$$\frac{4n^2C^2}{\overline{Cp}^3}.$$

DIXIÈME SECTION.

Du mouvement d'un corps sur une surface donnée et des oscillations d'un corps suspendu par un fil.

Newton décompose la force qui agit sur le corps en deux, l'une normale à la surface que le corps peut parcourir et l'autre tange- tielle, ce qui lui permet d'arriver plus facilement qu'Huyghens aux mêmes résultats et d'étendre même plus loin ses recherches

Ainsi il substitue au pendule cycloïdal d'Huyghens un pen- dule épicycloïdal dont la trajectoire serait engendrée par un poi d'une circonférence de cercle roulant sur la circonférence et l'extérieur d'un autre cercle; il suppose que le mobile soit atti vers le centre du cercle fixe par une force qui varie proportio nellement à la distance et il démontre que les oscillations de mobile seront toutes isochrones. Il détermine aussi le tem d'une de ces oscillations.

On repasse au pendule d'Huyghens en supposant au cer fixe un rayon infini, car alors la force devient constante, même temps que l'épicycloïde devient une cycloïde.

C'est très beau. Du reste les démonstrations de Newton sont infiniment plus simples que celles de Huyghens.

ONZIÈME SECTION.

Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement.

Les actions des corps les uns sur les autres, dit Newton, sont toujours mutuelles. Quels que soient donc les corps que l'on considère, aucun d'eux ne sera en repos : ils se mouvront de telle sorte que leur centre de gravité soit en repos ou se meuve uniformément en ligne droite.

Proposition LVII.

Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, et autour l'un de l'autre, des figures semblables.

DOUZIÈME SECTION.

Des attractions exercées par des corps sphériques.

Proposition LXX.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une surface sphérique dont toutes les parties égales l'attirent en raison inverse du quarré de la distance, n'éprouve aucune attraction de cette surface. Voici la démonstration de Newton.

Si l'on imagine un cône d'ouverture infiniment petite ayant son sommet au point considéré et qu'on prolonge ce cône dans l'autre sens, les deux surfaces interceptées sur la sphère seront

entre elles comme les quarrés des arêtes des deux cônes, mais
attractions exercées par les éléments égaux des deux surf
seront en raison inverse des quarrés des mêmes arêtes; donc
actions exercées en sens contraires sur le corpuscule ser
égales.

Proposition LXXI.

Si le corpuscule est placé en dehors de la surface sphérique
force qui agit sur lui est dirigée vers le centre et est inverseme
proportionnelle au quarré de sa distance à ce point.

La démonstration de Newton est encore fondée sur des co
dérations purement géométriques.

Proposition LXXIII.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une sphère homogè
dont toutes les parties égales l'attirent en raison inverse du qu
de la distance, tend vers le centre de cette sphère avec une fo
proportionnelle à la distance qui l'en sépare.

Proposition LXXIV.

Les mêmes choses étant posées, un corpuscule placé ho
d'une sphère est attiré vers le centre de cette sphère par une for
inversement proportionnelle au quarré de la distance.

Propositions LXXVI et LXXVII.

Deux sphères composées chacune de couches concentriqu
homogènes s'attirent mutuellement avec une force inversem
proportionnelle au quarré de la distance de leurs centres, ou p
portionnelle à cette distance, suivar éléments s'attir

mêmes en raison inverse du quarré de leur distance, ou pro-
ionnellement à leur distance.

TREIZIÈME SECTION.

Des forces attractives des corps qui ne sont pas sphériques.

ien, dans cette section, n'est amené à un point de fini qui nette d'en rendre compte.

QUATORZIÈME SECTION.

Du mouvement des corpuscules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque.

ette section a pour objet l'établissement des propositions dont vton se sert dans sa théorie de l'émission. Les corpuscules : les globules lumineux.

LIVRE SECOND.

e Second Livre traite des mouvements des corps dans des mi-x résistants et se termine par la réfutation de la doctrine des ·billons.

n y trouve une exposition rudimentaire des éléments de iéorie des fluxions, mais rien qui se rapporte à la recherche fluentes, en sorte qu'on ne voit pas à quoi peut servir cette ession, les questions que Newton traite dans ce Livre ressor-int exclusivement au calcul intégral; car les équations diffé-ielles se seraient présentées d'elles-mêmes, toutes préparées. s Newton n'y a même pas recours.

Quoi qu'il en soit, nous donnerons une analyse rapide
paragraphe en question, parce qu'il a de l'importance au
de vue historique.

L'intercalation se compose exactement de trois pages dont
grande partie est employée à expliquer ce qu'on doit ent
par *incréments* ou *décréments* de grandeurs variables,
croissent ou diminuent. Ces différences positives ou nég
seront appelées *moments*.

Si a et b sont les moments de A et de B, le moment de A.B
$aB + bA$.

Le moment de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$.

Celui de $A^3B^4C^2$ est $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B$
Mais la démonstration que donne Newton de ce théorème
pas très bonne : Si des côtés A et B d'un rectangle on retr
les moitiés des moments des côtés, $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$, le rectangle de

$$AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab;$$

si, au contraire on ajoute aux deux côtés les moitiés des m
moments, le rectangle devient

$$AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab.$$

Si l'on retranche les nouveaux rectangles, il reste

$$aB + bA,$$

qui est l'incrément du rectangle, produit par les incréme
entiers a et b des côtés.

ette démonstration suggère plusieurs remarques : Et d'abord ingulières dispositions que prend Newton pour arriver à un ément exact du rectangle A.B montrent qu'il n'a pas conçu, me Leibniz, la rigueur absolue de la méthode qui consiste à iger les infiniments petits d'ordres supérieurs, par rapport autres.

e plus, sa démonstration est un véritable escamotage, car, la pratique, l'incrément dont on aura besoin sera

$$(A + a)(B + b) - AB$$

on pas

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right).$$

ı fin il y a tromperie à simuler la possibilité d'étendre le rème tel qu'il est établi, relativement à l'expression (A.B), autres expressions monômes. Quels seraient en effet les éments qu'il faudrait faire prendre aux A qui entrent

$$A^{\frac{m}{n}}$$

r obtenir exactement, pour cette expression, l'incrément

$$\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}.$$

ısidérons seulement l'expression A.B.C à laquelle Newton lique sa règle de proche en proche, mais sans démonstration. posons qu'on voulût y voir clair : après avoir donné à t à B respectivement les deux demi-incréments

$$+\frac{1}{2}a \text{ et } -\frac{1}{2}a, \qquad +\frac{1}{2}b \text{ et } -\frac{1}{2}b,$$

ce qui fournirait pour AB l'incrément

$$aB + bA,$$

il faudrait ensuite donner à AB et à C respectivement les demi-incréments

$$\frac{1}{2}(aB + bA) \text{ et } -\frac{1}{2}(aB + bA), \qquad \frac{1}{2}c \text{ et } -\frac{1}{2}c.$$

Mais auparavant il faudrait revenir en arrière et supposer eût commencé par donner à A et B respectivement les ments

$$\frac{1}{4}a \text{ et } -\frac{1}{4}a, \qquad \frac{1}{4}b \text{ et } -\frac{1}{4}b,$$

afin de parvenir à l'incrément $\frac{1}{2}(aB + bA)$; et recomm

pour obtenir l'incrément $-\frac{1}{2}(aB + bA)$, etc. Tout cela pitoyable.

« Le moment de $\frac{1}{A}$ est $-\frac{a}{A^2}$, parce que

$$A \times \frac{1}{A} = 1$$

et que, par conséquent,

$$\text{moment } A \times \frac{1}{A} + A \times \text{moment } \frac{1}{A} = 0,$$

d'où

$$\text{moment } \frac{1}{A} = -\frac{\text{moment } A}{A^2} = -\frac{a}{A^2}. \text{ »}$$

Nous revenons aux questions traitées dans le second Livre. Newton, suivant son habitude, aborde une foule de questi

ubles que nous n'énoncerons même pas, mais dont voici
écimen : la résistance éprouvée par un corps pesant étant
osée proportionnelle au quarré de sa vitesse et à la densité du
u conjointement, on demande, la trajectoire étant assignée à
nce et quelconque, ce que doivent être la densité du milieu
aque point de cette trajectoire et la vitesse du mobile.

ous nous bornerons à l'analyse de quelques-unes des questions
Newton résout entièrement.

pposant d'abord que la résistance du milieu soit proportion-
à la vitesse. il examine les trois cas où le corps n'étant
nis à l'action d'aucune autre force, son mouvement est for-
ent rectiligne, où le corps a une vitesse initiale verticale et
oumis à l'action de la pesanteur, enfin où le corps, pesant, a
vitesse initiale quelconque.

ans le premier cas, l'équation du mouvement, en prenant
r axe des x la droite que décrit le mobile, est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv.$$

ıs sa première forme, elle donne immédiatement

$$\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -k(x - x_0),$$

$$v - v_0 = -k(x - x_0),$$

is Newton ne pose l'équation ni, à plus forte raison ne l'in-
re; voici ce qu'il dit :

« Le mouvement perdu pendant chaque particule du t
étant comme la vitesse, c'est-à-dire comme le chemin parc
durant cette particule du temps, le mouvement perdu pend
temps total sera comme le chemin total. »

Le mouvement perdu est la perte de vitesse, c'est $v_0 - v$,
est en effet proportionnel à l'espace parcouru $x - x_0$. Ma
raisonnement ne vaut pas l'intégration.

Sous sa seconde forme l'équation donne de même

$$dt = -\frac{1}{k}\frac{dv}{v},$$

d'où

$$t = -\frac{1}{k} \mathrm{L} \frac{v}{v_0},$$

si l'on compte le temps à partir du départ.

Voici ce que dit Newton (je cite le texte de M^me^ du Châ
vérifié comme on sait par Clairault) : « Soit divisé le temp
particules égales et soit supposée au commencement de chacu
ces particules une force résistante qui soit comme la vite
qui agisse par un seul coup (ceci est imité de Galilée); le d
ment de la vitesse, à chacune de ces particules de temps
comme cette vitesse, car les vitesses sont continuellemen
portionnelles à leurs différences. Donc si d'un nombre é
particules on compose des temps quelconques égaux, les v
au commencement (il aurait fallu le pluriel) de ces temps
comme les termes d'une progression continue pris par sa
omettant un nombre égal de termes intermédiaires. Or, les
de ces termes, pris par sauts, sont composées des raisons
termes intermédiaires ont entre eux, lesquelles sont les mê
les vitesses proportionnelles à ces termes sont en prog

nétrique. Maintenant soient diminuées ces particules égales
emps, et soit leur nombre augmenté infiniment, en sorte que
pulsion de la résistance devienne continue; et les vitesses qui
: toujours en proportion continue dans les commencements
temps égaux le seront encore dans ce cas. »

n pourra dire que Newton n'était pas obligé de savoir que la
ion de Lx est $\frac{1}{x}$. Mais ce ne serait pas exact, car il a parfaite-
t dit, plus tard, que celle de l'aire d'une courbe, par rapport
ɔscisse, est l'ordonnée; il a donc su que la fluxion de l'aire de
›erbole

$$xy = 1,$$

·apport à l'abscisse, est y ou $\frac{1}{x}$, et, d'un autre côté, il savait,
Mercator, que cette aire est le logarithme de x.

ı reste Newton trouve parfaitement que le temps est
cisse d'une hyperbole dont l'aire est la vitesse, au moyen du
:ème de Grégoire de Saint-Vincent.

ewton traite ensuite la question du mouvement vertical d'un
t pesant dans un milieu qui résiste proportionnellement à
tesse. L'équation différentielle du mouvement est dans ce
en supposant que le corps descende,

$$\frac{dv}{dt} = g - kv,$$

;, bien entendu, Newton ne l'écrit pas. Elle donne

$$dt = \frac{dv}{g - kv} = -\frac{1}{k}\frac{kdv}{kv - g}$$

$$t = -\frac{1}{k}\,\mathrm{L}\,(kv - g) + \text{const.},$$

et l'on obtient ensuite l'espace parcouru par une exponenti

Newton ne fait pas les intégrations, mais il arrive néanm aux résultats, par des considérations analogues à celles qui p cèdent.

Il traite par les mêmes moyens la question du mouve vertical d'un corps pesant dans un milieu qui résiste pro tionnellement au quarré de la vitesse.

Enfin il aborde le problème du mouvement d'un proj pesant, animé d'une vitesse initiale quelconque, dans les deu de résistance.

TROISIÈME LIVRE.

Sur le système du monde.

Nous avons déjà dit qu'il nous serait impossible de re complètement compte de cette partie, la plus importante ce dant du *Livre des Principes*, parce qu'elle ne se compose que précis de démonstrations qu'au reste on ne pourrait même aujourd'hui présenter d'une manière bien rigoureuse, puis pour un certain nombre des questions proposées, où les as seraient considérés comme exactement sphériques, on aboutir au problème des trois corps (ou d'un plus grand nombre de corp et que, pour les autres, où il faudrait tenir compte des aplatis ments, on se heurterait à des évaluations d'attractions impossib à faire.

Newton a assigné avec sa sagacité ordinaire les raisons tous les mouvements observés, c'est-à-dire la nature et la pro nance des forces en jeu. Mais ses calculs ne fournissent que premières approximations, qu'il a fallu corriger plus tard, bien que mal, et qu'on ne complètera jamais.

Nous nous bornerons donc, ce qui suffira à la gloire de ewton, à résumer les explications générales par lesquelles il bute, avant d'entrer dans les calculs. Au reste nous aurons us tard l'occasion de revenir sur ces calculs à propos des correcns qui y ont été apportées depuis.

Newton commence par constater, d'après les observations, que satellites de Jupiter et de Saturne se meuvent, par rapport à planètes, comme s'ils étaient attirés par elles en raison inverse quarré de la distance, les cubes des demi-diamètres principaux leurs orbites étant comme les quarrés des temps des révolus.

Cette raison est bonne. Newton y ajoute cette autre raison que orbites sont à peu près circulaires et les vitesses à peu près nstantes; ce qui ne vaut rien, car on ne pourrait rien conclure là si ce n'est qu'il n'y a pas contradiction.

Il reproduit les mêmes constatations relativement aux six nètes alors connues (la Terre comprise) considérées comme ellites du Soleil.

De là il conclut le principe de la gravitation universelle.

Proposition VIII.

Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est nogène à égales distances de leurs centres, le poids de l'un de globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de distance qui est entre leurs centres.

Il serait difficile de se douter, d'après cet énoncé, que cette prosition, démontrée dans le Premier Livre, est la plus importante troisième.

Newton ne la rappelle, sans aucune addition à la démonstration

déjà fournie, que pour trouver l'occasion d'en tirer, dans les co
laires, la solution du grand problème des masses et des dens
des principaux corps qui composent notre système planétair

Voici textuellement ces corollaires.

Corollaire I. — « Par là on peut trouver les poids des co
sur diverses planètes et les comparer entre eux, car les poids
corps égaux qui font leurs révolutions dans des cercles autour
planètes sont, par le corollaire II de la Proposition IV du Livr
comme les diamètres de ces cercles directement et les quarrés
temps périodiques inversement.

« Ainsi le temps périodique de Vénus autour du Soleil é
de $224^j 16^h \frac{3}{4}$; celui du satellite le plus éloigné de Jupiter aut
de cette planète, de $16^j 16^h \frac{8}{15}$; le temps périodique du sate
d'Huyghens autour de Saturne, de $15^j 22^h \frac{2}{3}$; et celui de la L
autour de la Terre, de $27^j 7^h 43^m$: j'ai trouvé, en employant
temps périodiques et, de plus, la distance médiocre de Vénus
Soleil, la plus grande élongation héliocentrique du satellite
Jupiter le plus éloigné de cette planète au centre de Jupiter,
est de 8′16″, celle du satellite d'Huyghens au centre de Satu
qui est de 3′4″ et celle de la Lune au centre de la Terre qui
de 10′33″, qu'à égale distance, les poids des corps égaux vers
centres du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre sont com

$$1,\quad \frac{1}{1067},\quad \frac{1}{3021}\quad \text{et}\quad \frac{1}{169282}$$

respectivement.

« A des distances inégales, ces poids varient en raison renve
du quarré des distances : par exemple, les poids de corps ég
placés sur les surfaces du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de

rre dont les rayons sont proportionnels à

10 000, 997, 791 et 109,

aient comme

10 000, 943, 5229 et 435;

dira dans la suite ce que les corps pèsent à la surface de la ine.

Corollaire II. — « On connaîtra aussi la quantité de matière e contient chaque planète. Car les quantités de matière dans planètes sont comme leurs forces attractives à égales distances leurs centres, c'est-à-dire que les quantités de matière du eil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre sont comme

$$1, \quad \frac{1}{1067}, \quad \frac{1}{3021} \quad \text{et} \quad \frac{1}{169\,282},$$

pectivement. Si l'on trouve la parallaxe du Soleil plus grande plus petite que 10″ 30‴, il faudra augmenter ou diminuer la antité de matière de la Terre en raison triplée.

Corollaire III. — « On connaîtra aussi les densités des pla-es, car les poids de corps égaux et homogènes aux surfaces de ères homogènes étant comme leurs diamètres, les densités des ères homogènes sont comme ces poids divisés par leurs dia-ètres. Donc, en vertu de ce qui précède, les densités du Soleil, Jupiter, de Saturne et de la Terre sont comme

$$100, \quad 94\tfrac{1}{2}, \quad 67 \quad \text{et} \quad 400.$$

« La Lune est plus dense que la Terre comme on le verra dans suite. »

Newton revient sur ce sujet dans son *Système du Monde*, qui

ne fut publié que bien postérieurement au *Livre des Princip*
mais il n'y est pas beaucoup plus clair.

Voici ce que je trouve au n° 13 de ce traité qui n'est qu'
abrégé du Troisième Livre des *Principes*, ce qui nous autoris
n'en plus parler.

« La distance du satellite (dont il s'agit) de Jupiter à la pl
est à la distance de Jupiter au Soleil comme

$$124 \text{ est à } 52012,$$

et à la distance de Vénus au Soleil, comme

$$124 \text{ est à } 7234;$$

et les temps périodiques (du satellite et de Vénus) sont

$$16^{j}\tfrac{3}{4} \text{ et } 224^{j}\tfrac{2}{3}.$$

« De là on conclut, par le second corollaire de la quatriè
proposition, en divisant les distances par les quarrés des tem
que la force par laquelle le satellite est poussé vers Jupiter est
force par laquelle Vénus est tirée vers le Soleil comme

$$442 \text{ est à } 143;$$

et en diminuant la force qui sollicite le satellite en raison doub
de la distance 124 à la distance 7234, on trouvera que l'attract
de Jupiter, à la distance de Vénus au Soleil, est à l'attract
exercée par le Soleil sur Vénus, comme

$$\frac{13}{100} \text{ est à } 143:$$

c'est-à-dire qu'à la même distance l'attraction du Soleil e
1100 fois plus grande que celle de Jupiter.

'« On trouverait de la même manière, d'après le temps périoque du satellite de Saturne, lequel est de $15^{j}\,22^{h}\,\frac{2}{3}$, et de sa plus 'ande élongation par rapport à Saturne, lorsqu'il est à sa moindre .stance de nous, laquelle est de $3'20''$, que la distance de Saturne son satellite est à la distance du Soleil à Vénus comme

$$92\tfrac{2}{3} \text{ est à } 7234;$$

que, par conséquent, la force attractive du Soleil est 2360 fois us grande que celle de Saturne à la même distance. »

Newton passe de même à la détermination de la masse de la erre, au moyen du temps périodique de la Lune et de la distance ıi nous sépare de notre satellite.

Clairault n'est pas plus clair dans son commentaire sur le Troisème Livre des *Principes;* voici ce qu'il dit :

« M. Newton cherche, dans la Proposition VIII du Livre III, que pèserait le même corps sur les différentes planètes et il le ouve en faisant usage du Corollaire II de la Proposition IV du ivre I, dans lequel il a fait voir que les poids des corps égaux ıi circulent dans des cercles sont comme les diamètres de ces rcles directement, et comme les quarrés de leurs temps périoques inversement; donc, connaissant les temps périodiques de 'nus autour du Soleil, des satellites de Jupiter autour de cette anète, des lunes de Saturne autour de Saturne, et de la Lune ıtour de la Terre, et les distances de ces corps aux centres autour squels ils tournent; et supposant que ces corps décrivent des rcles dans leurs révolutions, ce qui peut se supposer dans le cas ınt il s'agit, on trouve quel serait le poids du même corps ınsporté successivement à la même distance du centre du Soleil, Jupiter, de Saturne et de la Terre. »

L'obscurité du texte de Newton, obscurité que Clairaut laissée subsister, je ne sais pourquoi, tient à plusieurs caus la première, que les énoncés, comme au reste les considéra renferment des éléments inutiles à connaître ; la seconde, q Newton ne veut absolument énoncer que des proportions et refuse toujours à formuler des égalités ; la troisième et la princip qu'il manque en réalité quelque chose d'essentiel à la théorie que Newton ne veut ni en convenir, ni le laisser deviner, quoi il serait forcément arrivé en s'exprimant plus clairem

Newton a parfaitement établi que le mouvement ellipti d'un corps, sous la condition de la proportionnalité aux temps aires décrites par le rayon vecteur mené au mobile de l'un foyers de la trajectoire, entraîne comme conséquence qu mobile soit soumis à l'action d'une force dirigée vers ce m foyer et variant en raison inverse du quarré de la distance.

Il a aisément pu constater que les forces accélératrices animent plusieurs corps célestes tournant autour d'un m astre, beaucoup plus considérable qu'eux, seraient égales si o rapportait à la même distance.

Mais il n'avait aucun moyen de reconnaître, d'une fa précise, si l'unité de masse prise dans le Soleil, dans l'une planètes, ou dans un de leurs satellites, exercerait la m attraction, à la même distance, sur une même masse, de na déterminée. Il fallait en effet pour mettre ce principe hors doute, une assez longue pratique, dans toutes sortes de circ stances, directes et inverses, de l'hypothèse de la gravitation u verselle; et un accord constant des résultats fournis par le ca avec les observations.

Newton suppose le fait, mais il ne veut pas énoncer l'hypoth

Sa démonstration devient très claire dès qu'on rétablit les us-entendus, qu'on écrit les équations, et qu'on supprime les nnées inutiles.

La force, dirigée vers le centre, qui retient un corps dans une bite circulaire, qu'il parcourt uniformément, est, pour l'unité masse,

$$j = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

désignant le rayon du cercle, v la vitesse du mobile, ω sa vitesse ıgulaire et T le temps d'une révolution entière.

Dans l'hypothèse où l'accélération j du mobile est le poids, à la stance r, de l'unité de masse du mobile, sur l'astre qui occupe centre du cercle, comme ce poids est d'ailleurs exprimé par

$$\frac{fM}{r^2},$$

désignant la masse du corps attirant et f l'attraction de l'unité masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, on a donc n considérant comme des cercles les ellipses effectivement ;crites)

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{fM}{r^2},$$

ıels que soient le corps attirant et le corps attiré.

Cela posé, cherchons par exemple le rapport des masses du ›leil et de Jupiter : soient M la masse du Soleil, R la distance cet astre à Vénus et T le temps de la révolution de Vénus ıtour du Soleil, on aura donc

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{fM}{R^2}.$$

Soient de même m la masse de Jupiter, r la distance de cette pla-
nète au satellite dont parle Newton et t le temps de la révolution
de ce satellite autour de Jupiter, on aura aussi

$$\frac{4\pi^2}{t^2}r = \frac{fm}{r^2};$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2;$$

ou, en prenant les nombres donnés par Newton, savoir

$$r = 124, \quad R = 7234, \quad t = 16^j\tfrac{3}{4} \text{ et } T = 224^j\tfrac{2}{3},$$

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{7234}{124}\right)^3 \left(\frac{16\frac{3}{4}}{224\frac{2}{3}}\right)^2,$$

ce qui effectivement donne à peu près

$$\frac{M}{m} = 1100.$$

Il reste cependant à observer qu'on ne voit pas pourquoi Newton, dans cette recherche, suppose les mouvements circulaires : il ne lui eût pas été beaucoup plus difficile de les prendre tels qu'ils sont. Nous verrons en effet par la Proposition XV que savait parfaitement que la force, ramenée à l'unité de distance qui retient une planète dans son orbite, est donnée par la formule

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Proposition X.

Les mouvements des planètes peuvent se conserver très longtemps.

ce n'est pas prouvé pour l'avenir, ce l'est du moins pour le é. Mais un très long temps ne paraît pas un temps très bien ni, et la proposition pouvait, sans inconvénient, rester dans rier.

Proposition XI.

e centre commun de gravité du Soleil, de la Terre et de toutes planètes est en repos.

e n'est pas très certain.

u reste voici le raisonnement de Newton : car ce centre ou en repos, ou sera mu uniformément en ligne droite. Mais si entre avançait toujours, le centre du monde ne serait donc pas epos, ce qui est contre l'hypothèse.

our être juste, il faut ajouter qu'il vient de faire cette othèse.

Proposition XII.

e Soleil est toujours en mouvement, mais il s'éloigne très peu entre de gravité commun.

ewton dit que : si la Terre et toutes les planètes étaient d'un ne côté du Soleil, le centre commun de gravité s'éloignerait à ie du centre du Soleil d'un demi-diamètre de cet astre.

Proposition XIII.

es planètes se meuvent dans des ellipses qui ont un de leurs ers au centre du Soleil et les aires décrites autour de ce centre t proportionnelles aux temps.

Newton s'exprime ainsi pour reproduire les lois de Képler, is il ajoute que, s'il en est sensiblement ainsi, c'est qu'on peut

négliger les actions mutuelles de tous ces corps et pri-
lement la réaction de chaque planète sur le Soleil.

« Toutefois l'action de Jupiter sur Saturne n'est pas
geable. L'excentricité de Saturne est tantôt augmentée
diminuée, lors de ses conjonctions avec Jupiter; son
avance ou recule selon les cas, et son moyen mouvem
tantôt accéléré, tantôt retardé.

« Les actions de Saturne sur Jupiter sont moins sen

« L'orbite de la Terre est sensiblement dérangée par l'acti
la Lune. Le centre commun de gravité de la Terre et de la
décrit autour du Soleil une ellipse dont cet astre occupe
des foyers et les aires décrites par ce centre sont propor
nelles au temps. La Terre fait sa révolution autour du
centre dans un mois. »

Proposition XIV.

Les aphélies et les nœuds des orbites sont en repos, si,
précédemment, on néglige les effets à peine sensibles des
perturbatrices. Toutefois, si les planètes Vénus, Mercu
Terre et Mars sont beaucoup trop petites pour que leurs
mutuelles soient appréciables, elles subissent d'autre pa
actions de Jupiter, de Saturne et *des autres corps placés*
dessus d'elles. Leurs aphélies se meuvent un peu, en c
quence, et l'on trouve, dit Newton, par la théorie de la g
(mais il n'entre à cet égard dans aucune explication) que
mouvements de ces aphélies sont en raison sesquiplée
distances au Soleil des planètes correspondantes : 33′20″
Mars en cent ans, 17′40″ pour la Terre, 10′53″ pour Vénus
4′16″ pour Mercure.

Proposition XV.

ouver les diamètres principaux.

faut prendre les diamètres en raison sesquiplée des temps diques, mais, pour tenir compte de ce que le Soleil n'est pas lument fixe, comme on l'avait supposé d'abord (dans le Premier e), il faut augmenter le diamètre de chacun des orbes dans ison marquée par la première des deux moyennes proportion-s entre la somme des masses de la planète et du Soleil et la se du Soleil.

ewton ne donne aucune explication à cet égard, mais quand raite la question en tenant compte à la fois de l'action du il sur chaque planète et de la réaction de la Planète sur le il, on trouve, en désignant par a le grand axe de l'orbite de lanète, par T le temps de sa révolution, par m sa masse, et M la masse du Soleil,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{M+m}{M} k,$$

ésignant une constante. Il en résulte

$$a = T^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{m}{M}}.$$

t bien ce que donne la règle de Newton, car la première des x moyennes proportionnelles dont il parle est

$$\sqrt[3]{M(M+m)^2},$$

raison dans laquelle il faut, d'après lui, augmenter le dia-re principal de l'orbe est

$$\frac{M+m}{\sqrt[3]{M(M+m)^2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{\frac{M+m}{M}}.$$

Proposition XVI.

Trouver les excentricités et les aphélies des orbes. Il n'e
que d'une construction.

Proposition XVII.

Les mouvements diurnes des planètes sont uniformes
libration de la Lune vient de son mouvement diurne.

Les temps des révolutions, par rapport aux étoiles sont

Jupiter	$9^h 56^m$.
Mars	$24^h 39^m$.
La Terre	$23^h 56^m$.
Vénus	23^h.
Le Soleil	$25^j \frac{1}{2}$.
La Lune	$27^j 7^h 43^m$.

La Lune présente toujours la même face à la Terre.
différence près qui résulte de l'excentricité de son orbite.
rence qui occasionne la libration en longitude. Quant
libration en latitude, elle dépend de la latitude de la Lu
tient à l'inclinaison de son axe sur le plan de l'écliptique.

Les satellites des autres planètes paraissent comme la L
présenter toujours les mêmes faces aux planètes qu'elles ac
pagnent.

Proposition XVIII.

Les axes des planètes sont moindres que les rayons de
équateurs.

Proposition XIX.

Déterminer le rapport des axes d'une planète. Newton tro

considération d'un canal liquide formé de deux branches
ées l'une suivant le rayon polaire, l'autre suivant un rayon
orial, que le rapport des deux rayons, pour la Terre, est
de

$$19\,573\,000 \text{ à } 19\,658\,600.$$

s'agit d'une autre planète, la différence des rayons, dit
on, variera en raison doublée, à peu près, de celle dans
elle aura varié la vitesse de rotation; d'un autre côté, la
e différence variera en raison inverse de celle dans laquelle
varié la gravité (à la surface de la planète), Newton trouve
que le rayon polaire et le rayon équatorial de Jupiter sont
ne

$$9\tfrac{1}{3} \text{ à } 10\tfrac{1}{3},$$

près.

Proposition XXI.

s points équinoxiaux rétrogradent et l'axe de la Terre, à
ne révolution annuelle, a une nutation par laquelle il s'in-
deux fois vers l'écliptique et retourne deux fois à sa pre-
e position.

Proposition XXII.

us les mouvements de la Lune et toutes ses inégalités se
isent des principes posés précédemment.

Proposition XXIII.

es inégalités des mouvements des satellites de Jupiter et de
rne sont analogues à celles des mouvements de la Lune.

Proposition XXIV.

Le flux et le reflux de la mer sont causés par les action
Lune et du Soleil.

La mer doit s'abaisser et s'élever deux fois chaque jour
solaire que lunaire, et la plus grande élévation de l'eau d
mers libres et profondes doit suivre de moins de six heures
sage de l'astre au méridien du lieu.

L'action du Soleil ou de la Lune pour élever les eau
mer est la plus forte au moment du passage de l'astre au
dien; mais, la force continuant d'agir, le maximum de l'é
lieu qu'un certain temps après, trois heures environ.

Les mouvements produits par les deux astres se compos
un seul. Leurs effets s'ajoutent dans les syzygies et se re
chent dans les quadratures.

Les actions exercées par le Soleil et la Lune dépendent
de leurs distances à la Terre. Elles sont maximums
périgées et minimums aux apogées.

Ces actions dépendent encore des déclinaisons des deux
elles atteignent leurs maximums lorsque les astres se tro
dans l'équateur et leurs minimums lorsqu'ils s'en écart
plus.

Enfin elles dépendent aussi de la latitude du lieu d'observ

Newton reviendra plus loin sur les Propositions XXI, X
XXIII et XXIV.

Proposition XXV.

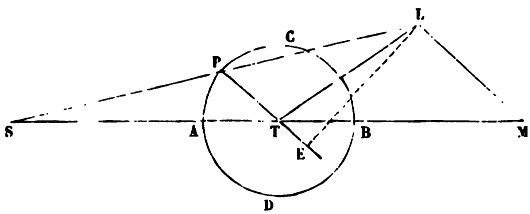
Trouver la force avec laquelle le Soleil trouble le mouve
de la Lune.

ient (*fig.* 13) S le Soleil, T la Terre, P la Lune, CADB l'or-
le notre satellite : si l'on prend TS pour représenter l'action
oleil sur l'unité de masse de la Terre, la droite qui représen-
a force accélératrice du Soleil sur la Lune sera fournie par
oportion.

$$X : TS :: \overline{ST}^2 : \overline{SP}^2.$$

LS cette longueur, et menons LM parallèle à PT. La
LS est la résultante de MS et de LM; d'ailleurs MS se com-

Fig. 13.



de TS et de MT. La Terre et la Lune sont donc soumises à
même force représentée par TS, laquelle ne tend pas à
ger leurs situations relatives, et la Lune est, en plus, sou-
aux forces MT et LM qui troublent le mouvement que lui
imerait l'attraction de la Terre.

Proposition XXVI.

rouver l'incrément horaire de l'aire que la Lune décrit
ur de la Terre, en supposant son orbite circulaire.

es forces LM et MT (*fig.* 13) ont pour résultante LT, qui
écompose elle-même orthogonalement en LE et ET, mais
ion de ET n'influe pas sur le mouvement angulaire de la

Lune autour de la Terre. Reste donc l'action de LE,
Newton calcule approximativement l'effet.

Désignons par d la distance de la Terre au Soleil, par
rayon de l'orbite de la Lune, supposée circulaire : la force
lératrice avec laquelle la Terre tend vers le Soleil est

$$\frac{f.M}{d^2}.$$

C'est cette force que Newton représente par TS ; la force
représente par LS est, par suite,

$$LS = \frac{f.M}{d^2} \frac{d^2}{\overline{SP}^2} = \frac{f.M}{\overline{SP}^2},$$

la force LM s'obtiendra par la proportion

$$\frac{LM}{LS} = \frac{PT}{SP} = \frac{r}{SP},$$

on aura donc

$$LM = \frac{f.M}{\overline{SP}^2} \frac{r}{SP} = \frac{f.M.r}{\overline{SP}^3};$$

quant à la force MT, elle est la différence des forces MS e
mais

$$\frac{MS}{LM} = \frac{ST}{TP} = \frac{d}{r};$$

par conséquent,

$$MS = \frac{f.M.r}{\overline{SP}^3} \frac{d}{r} = \frac{f.M.d}{\overline{SP}^3},$$

de sorte que

$$MT = MS - TS = \frac{f.M.d}{\overline{SP}^3} - \frac{f.M}{d^2}.$$

la posé, la force LE est la projection de MT sur une perpen-
ulaire à TP.

Représentons donc par ω l'angle BTP, nous aurons pour LE
xpression

$$\mathrm{LE} = \mathrm{MT} \sin\omega = f\,\mathrm{M}\left(\frac{d}{\overline{\mathrm{SP}}^3} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega;$$

fin, dans le triangle STP, où les côtés TS et TP, qui sont
et r, comprennent entre eux l'angle $\pi - \omega$,

$$\overline{\mathrm{SP}}^2 = d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega;$$

r conséquent, en résumé,

$$\mathrm{LE} = f\,\mathrm{M}\left(\frac{d}{(d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega.$$

tte force LE, qui est appliquée à la Lune, est dirigée tangen-
llement à l'orbite de notre satellite, tandis que les deux autres
rces sont dirigées suivant le rayon de l'orbite : elle agit donc
ule pour modifier la vitesse de la Lune. On pourrait donc écrire,
désignant par v la vitesse de la Lune dans son orbite,

$$\frac{dv}{dt} = f\,\mathrm{M}\left(\frac{d}{(d^2 + r^2 + 2dr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right)\sin\omega.$$

Mais, si l'on désigne par θ l'angle décrit effectivement par le
ayon TP, depuis la Nouvelle Lune précédente,

$$v = r\frac{d\theta}{dt},$$

'où

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

d'un autre côté, si l'on désigne par αt l'angle décrit aussi dep
la Nouvelle Lune précédente par le rayon ST,

$$\theta = \omega + \alpha t,$$

d'où

$$\omega = \theta - \alpha t,$$

l'équation à intégrer serait donc

$$r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = f\,\mathrm{M}\left[\frac{d}{[d^2 + r^2 + 2\,dr\cos(\theta - \alpha t)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{d^2}\right]\sin(\theta - \alpha$$

Mais Newton ne cherche même pas la formule de la force
dont il avait si heureusement aperçu la prépondérance dans
question qu'il traite et dont nous avons voulu obtenir la form
pour montrer quelle difficulté analytique il eût fallu surmo
pour obtenir la solution intégrale du problème.

Les autres questions que Newton aborde dans sa théorie de
Lune présentent des difficultés tout aussi considérables. C
pourquoi j'ai cru pouvoir dire qu'il n'avait certainement
fait les intégrations nécessaires.

Quant aux calculs arithmétiques que j'ai supposé qu'il avait
faire, ils ne présenteraient certainement pas des difficultés ins
montables : par exemple, si, pour traiter la question qui n
occupe actuellement, on divisait en un assez grand nombre
parties égales le temps compris entre deux syzygies successiv
on pourrait, dans chacun des intervalles, considérer le mouvem
en question de la Lune comme uniformément accéléré; l'accé
ration de ce mouvement angulaire, au commencement du pr
mier intervalle de temps, étant nulle, puisque θ et t seraient al
nuls, on calculerait l'angle θ_1 décrit dans ce premier interv

e temps, au moyen de la vitesse initiale $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$; ayant θ_1, on onnaîtrait l'accélération j_0 du mouvement au commencement u second intervalle de temps; on aurait donc l'angle θ_2 décrit endant le second intervalle de temps, et la vitesse $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1$ au oyen des formules

$$\theta_2 = \frac{d\theta}{dt}t + \frac{1}{2}j_0 t^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 + j_0 t;$$

t l'on continuerait de même.

J'imagine que c'est par des considérations de ce genre que Newton a pu faire, à propos de toutes les questions qu'il traite, es calculs dont il donne les résultats. Dans la question présente, u moins, il est certain qu'il a employé à peu près cette manière e procéder, quoiqu'il ne s'explique pas très clairement. Voici en ffet sa conclusion, que je prends dans la traduction de M^me du Chatelet.

« Donc l'aire que la Lune décrit autour de la Terre à chaque artie égale du temps, est à peu près comme la somme du nombre 19,46 et du sinus verse du double de la distance de la Lune à la rochaine quadrature, dans un cercle dont le rayon est l'unité. »

Proposition XXVII.

Trouver la distance de la Lune à la Terre, au moyen du mouvement horaire de la Lune.

Proposition XXVIII.

Trouver les axes de l'orbite que la Lune devrait décrire, si elle était sans excentricité (par rapport à la Terre).

Cet énoncé n'est pas clair, Newton suppose que les conditions

de la Lune soient telles que, si le Soleil ne troublait pas
mouvement, elle décrirait un cercle autour de la Terre
cherche la déformation que l'action perturbatrice du
devrait imprimer à cette orbite. L'hypothèse est parfaite
raisonnable puisque, pour qu'elle se trouvât réalisée, il suffi
que la vitesse de la Lune, dans son mouvement produit par
tion de la Terre, à l'un des moments où cette vitesse est perp
diculaire à la ligne qui joint les deux astres, satisfît à la
dition

$$j = \frac{v'^2}{r},$$

r désignant la distance de la Lune à la Terre à ce moment,
la gravité à la distance r.

Cela posé, en se reportant à la *fig.* 13, on peut aisément
rendre compte des variations de la force perturbatrice du Sol

Dans les quadratures, SP étant égal à ST, le point L coïnc
avec le point P et le point M avec le point T, à très peu prè
cause de la grande distance du Soleil, de sorte que la force
est nulle et qu'il ne reste que LM, qui est alors représentée p
le rayon CT de l'orbite lunaire.

Dans la conjonction ou l'opposition, c'est LM qui est nu
et il ne reste que MT qui elle-même se réduit à LS — ST.
dans la conjonction, c'est-à-dire lorsque la Lune est en A,

$$LS : ST :: \overline{ST}^2 : \overline{SA}^2,$$

par conséquent LS est plus grand que ST et le point M, qui s
confond alors avec L, est à droite du point T, la force perturb
trice est donc dirigée de la Lune vers le Soleil et la Lune p
moins vers la Terre que si le Soleil n'e[illegible] pas.

Dans l'opposition, au contraire, c'est-à-dire lorsque la Lune
en B,

$$LS : ST :: \overline{ST}^2 : \overline{SB}^2,$$

r conséquent LS est moindre que ST et le point M, qui se nfond encore avec L, est à gauche du point T; la force perturtrice est donc dirigée du Soleil vers la Lune et la Lune pèse core moins sur la Terre que si le Soleil n'existait pas.

En résumé la gravité de la Lune vers la Terre est plus grande ns les quadratures que dans les syzygies.

Si donc on pouvait supposer la vitesse de la Lune à peu près nstante, la formule

$$jr = v^2$$

ontrerait que le rayon de courbure r de l'orbite doit être oindre dans les quadratures que dans les syzygies, puisque l'aclération j est plus grande dans le premier cas que dans le cond, on en conclurait que l'orbite, dans chaque lunaison, doit oir son grand axe dirigé dans le sens des quadratures et son tit axe dans le sens des syzygies.

Ce n'est pas ainsi qu'opère Newton. Du reste, il tient compte changement de vitesse de la Lune : il trouve que les distances la Lune à la Terre, dans les syzygies et dans les quadratures, nt à peu près dans le rapport de

$$69 \tfrac{1}{24} \text{ à } 70 \tfrac{1}{24},$$

ujours dans l'hypothèse où l'action de la Terre sur la Lune e lui aurait imprimé qu'un mouvement circulaire uniforme.

On remarquera que cette théorie convient absolument aux arées.

Cette inégalité est la différence qui existe entre
rayon mené de la Terre à la Lune aurait dû parco
de sa vitesse moyenne et celui qu'il parcourt
Cette variation, observée par Tycho-Brahé, acquie
mum dans les octants; elle provient de l'aplatisseme
de la Lune dans le sens du diamètre passant par
consécutives et de l'inégalité qui en résulte dans la
laire de l'astre.

Newton trouve 35′ 10″ pour la valeur maxim
variation, en négligeant les influences secondaires.

Propositions XXX, XXXI, XXXII et XXXII

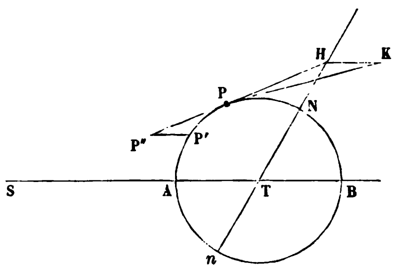
Trouver le mouvement horaire des nœuds de la L
une orbite circulaire, 2° dans une orbite elliptiqu
mouvement moyen et le mouvement vrai des nœuds

La force LM (*fig.* 13) reste toujours dirigée dan
l'orbite lunaire et ne peut avoir d'effet sur la dir
plan; c'est la force MT qui peut en changer la s
rapport au plan de l'écliptique, c'est-à-dire influer à
direction de l'intersection des deux plans, ou de

signant la ligne des nœuds : la force perturbatrice MT (*fig.* 13), dont nous nous occupons, est parallèle à TS, elle fera donc parcourir à la Lune (*fig.* 14) un chemin P′P″ parallèle à TS, pendant que cet astre parcourrait le chemin PP′, en vertu de l'action seule de la Terre. La Lune suivra donc le chemin PP″.

Cela posé, l'élément P′P prolongé ira rencontrer la ligne des

Fig. 14.



nœuds en un point H, puisque ces deux droites sont dans le plan de l'orbite; quant à l'élément P″P, si on le prolonge, il ira rencontrer le plan de l'écliptique en K et le point K appartiendra à la nouvelle position de la ligne des nœuds qui, ainsi, deviendra TK.

La ligne des nœuds aura donc tourné de l'angle HTK. Or P′P″ et HK sont dans un même plan (celui du triangle PP′P″) mais P′P″ étant parallèle au plan de l'écliptique (puisqu'elle est parallèle à TS) ne peut pas rencontrer HK (qui est dans le plan de l'écliptique). P′P″ et HK sont donc parallèles et les deux triangles PP′P″ et PHK sont semblables; il en résulte

$$HK : HP :: P'P'' : PP',$$

roportion qui donne HK. On conçoit donc qu'on puisse calc
'angle HTK parcouru par la ligne des nœuds dans le te
ue mettrait la Lune à parcourir l'arc PP′, si elle se mou
n vertu seulement de l'action de la Terre.

Proposition XXXIV.

Trouver la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite de
Lune sur le plan de l'écliptique.

Proposition XXXV.

Trouver pour un temps donné l'inclinaison de l'orbite de
Lune sur le plan de l'écliptique.

Propositions XXXVI et XXXVII.

Ces propositions ont pour objet la théorie des marées. Ce
théorie, nous l'avons déjà fait remarquer, est la même que ce
de la Proposition XXV. La mer pèse moins sur la Terre lors
l'astre perturbateur, la Lune ou le Soleil, est dans le méri
que lorsqu'il est dans l'horizon.

Proposition XXXVIII.

Trouver la figure de la Lune.

De même que la Lune élève la surface de la mer du côté qu
regarde et du côté opposé, la Terre aussi élèverait la surface de
Lune, si notre satellite était fluide; la Lune doit donc avoir pr
dès le commencement, la forme d'un sphéroïde allongé dont
grand axe passe par le centre de la Terre; et c'est la raison po
laquelle elle nous présente toujours la même face; elle for

ne un immense pendule pour lequel la position d'équilibre
lle où le grand axe est dirigé vers la Terre.

us avons suivi Newton, dans sa théorie de la Lune, aussi temps qu'il nous a été possible, c'est-à-dire tant que la route éclairée. Il s'occupe encore de rechercher différentes inéga- de notre satellite, mais les explications qu'il donne alors ne véritablement plus intelligibles.

es explications, au reste, se réduisent presque toujours à des mations conçues toutes dans une même formule : « J'ai vé, par la théorie de la gravité, que ... », or, je ne sache pas l en ait été donné de commentaires satisfaisants.

oici ce qu'en pensait Clairaut :

M. Newton, après avoir exposé la méthode par laquelle il ule celle des inégalités de la Lune appelée sa variation, et la hode qu'il suit pour déterminer le mouvement des nœuds et ariation de l'obliquité (de l'orbite) sur l'écliptique, rend pte de ce qu'il dit avoir tiré de sa théorie de la gravitation rapport aux autres inégalités de la Lune. Mais il s'en faut bien ce qu'il donne alors puisse être aussi utile aux géomètres que u'il a dit auparavant par rapport aux inégalités dont je viens parler.

Dans l'examen des premières inégalités, quoique le lecteur soit pas extrêmement satisfait à cause de quelques suppositions de quelques abstractions faites pour rendre le problème plus ile, il a du moins cet avantage qu'il voit la route de l'auteur et 'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se ter d'aller plus loin. Mais, quant à ce qui regarde le mouve- nt de l'apogée et la variation de l'excentricité, et toutes les

autres inégalités du mouvement de la Lune, M. Newton a tente des résultats qui conviennent aux astronomes » (C veut sans doute dire : obtenus par les astronomes) « et il que sa théorie de la gravité l'a conduit à ces résultats.

« M. Horrox, célèbre astronome anglais, avait p M. Newton sur la partie la plus difficile des mouvements Lune, sur ce qui regarde l'apogée et l'excentricité. On est que ce savant, dénué des secours que fournissent le calc principe de l'attraction, ait pu parvenir à réduire des m ments si composés sous des lois presque semblables à cel M. Newton, et ce dernier, si respectable d'ailleurs, paraît tant plus blâmable, en cette occasion, d'avoir caché sa m qu'il s'exposait à faire croire que ses théorèmes étaient, c ceux des astronomes qui l'avaient précédé, le résultat de l'e des observations, au lieu d'être une conséquence qu'il eût de son principe général. »

Proposition XXXIX.

Trouver la précession des équinoxes.

Nous avons vu que l'action perturbatrice du Soleil s Lune produit entre autres effets la rétrogradation de la lig nœuds de notre satellite. Concevons la sphère décrite sur la des pôles terrestres comme diamètre et considérons une partie de la portion de la Terre comprise entre cette sphère et la surface ellipsoïdale vraie de notre globe. Cette parti si elle était libre, formerait une très petite Lune tournant au de la ligne des pôles terrestres, mais elle subirait, de la part Soleil, une action perturbatrice ayant entre autres effets celu faire rétrograder la ligne de ses nœuds.

'on étend la même analogie à toutes les parties qui compo-
e bourrelet terrestre compris en dehors de la sphère décrite
ligne de ses pôles et qu'on rétablisse la liaison qui existe
elles, en laissant leur ensemble, c'est-à-dire le bourrelet,
endant du reste de la Terre, on verra que ce bourrelet
t autour de la ligne des pôles, dans le sens rétrograde, un
ement propre par suite duquel la ligne des nœuds de son
eur, dans l'écliptique, tournerait comme la ligne des nœuds
rbite lunaire.

e l'on rétablisse ensuite la liaison entre le bourrelet et la
sphérique de la Terre, il est évident que ce bourrelet sera
dé dans son mouvement par le reste du globe, mais lui com-
iquera une petite partie de son mouvement rétrograde.

s quelques mots contiennent une explication très simple et
lumineuse du phénomène de la précession des équinoxes.

on y ajoute les démonstrations de ces théorèmes très remar-
les de Géométrie : 1° *Si les particules composant le ménisque
estre compris entre la surface du globe et celle de la sphère
ite sur la ligne des pôles, étaient portées à s'éloigner du
mené par le centre de la Terre perpendiculairement à la
te qui joint ce centre à celui du Soleil, par des forces pro-
ionnelles à leurs distances à ce plan : celles de ces particules
sont situées dans le plan de l'équateur auraient, pour
e tourner la Terre autour de l'intersection des deux plans,
force moitié de celle qu'elles exerceraient si elles étaient
mulées au point de l'équateur le plus éloigné du plan pré-
ni ;* 2° *Toutes les particules composant le même ménisque,
ées tant dans le plan de l'équateur qu'en dehors, exerce-
nt sur la Terre pour la faire tourner autour du même axe,*

une force égale aux deux cinquièmes de celle avec la elles agiraient si elles étaient rapportées dans le plan de l teur ; 3° Le mouvement de la Terre autour de l'axe dont il serait au mouvement de l'anneau constitué par le rabattu sur l'équateur, dans la raison composée du poids Terre au poids de l'anneau et de celle de trois fois le du quart d'un cercle à deux fois le quarré du diamètre cercle.

Il est remarquable que pour établir ces propositions, se sert du théorème de Roberval que, *si l'on suppose une circonférence de cercle divisée en un nombre infini de égales, la somme des quarrés des sinus des arcs allant des extrémités de la demi-circonférence à tous les division sera égale à la somme des quarrés d'autant de du cercle.*

La fin du Troisième Livre est consacrée à la théorie des théorie que Newton créa en quelque sorte, mais qu'il qu'ébaucher.

Jusqu'à Newton, le mouvement des comètes avait toujours considéré comme n'obéissant à aucun gouvernail. Newton mit ces astres aux lois de la gravitation universelle.

Il nous resterait à parler d'un dernier Ouvrage scientifique, ou *Théorie de la Lune*, qui n'a été publiée que beaucoup plus tard. Mais nous n'y avons trouvé qu'une reproduction de ce qu'il avait dit, dans le Troisième Livre des *Principes*, sur notre satellite.

Nous n'avons trouvé, dans les œuvres de Newton, méthode pour obtenir les limites des racines des équations, par la considération des dérivées ; ni la méthode

ıer de la véritable valeur d'une racine, déjà séparée. Il est ≥ que ces deux méthodes se trouvent indiquées dans sa ›ndance, éparse dans différents recueils.

ıs resterait encore à parler de deux lettres adressées par , en juin et octobre 1676, à Oldenbourg, pour être com-. ées à Leibniz, et qui lui parvinrent en effet. Mais comme x lettres ont été invoquées en faveur de Newton, à on de sa querelle avec Leibniz au sujet de l'invention du nfinitésimal, et que d'ailleurs elles avaient été provoquées lettres antérieures de celui-ci, elles trouveront plus ement leur place dans la biographie de Leibniz.

nous bornerons ici à répéter ce que nous avons déjà dit : établissent bien nettement qu'en 1676 Newton était possession de sa méthode des fluxions, parce qu'il y a es anagrammes de phrases relatives à cette méthode, et que grammes s'accordent parfaitement avec la traduction qui donnée à l'occasion du procès.

ajouterons seulement qu'elles n'avaient aucune valeur ıe dans le litige, puisque Newton avait caché ce qu'il it qu'on lui avait emprunté.

ıt au contenu de ces lettres, nous n'y avons rien vu d'im- qui ne se trouve dans les autres Ouvrages de Newton ; en ı'elles ne peuvent servir qu'à établir les dates de quelques- ses inventions analytiques.

DŒRFEL (GEORGES, SAMUEL).

[Né à Plauen (Voigtland) en 1643, mort à Weida en 1688.]

Pasteur luthérien. Il s'adonna spécialement aux études nomiques : il observa l'un des premiers la fameuse comète la suivit dans son mouvement, du 22 novembre à la fin vier, assigna assez approximativement sa distance péri ayant reconnu que sa trajectoire se confondait, à très pe avec une parabole dont le Soleil occupait le foyer, il fit importante observation la base d'une théorie générale qu'il sous le titre de *Etude astronomique des grandes comètes.*

Hévélius avait bien reconnu antérieurement que les des comètes ont leur concavité tournée vers le Soleil, l'hypothèse du mouvement parabolique ; mais Dœrfel seulement le premier astronome qui ait justifié cette hy mais aussi le premier qui ait eu l'idée de placer au Soleil commun des trajectoires de toutes les comètes. Cette dé de Dœrfel est d'autant plus méritoire que les astrono temps, Cassini entre autres, voyaient le plus souvent deux différents dans une même comète, observée avant et ap passage au périhélie. Dœrfel eut, sous ce rapport, à co un préjugé établi, en opposition directe avec toute possib progrès ultérieur.

« Le livre des *Principes* n'ayant paru qu'en 1686, on rait contester à Dœrfel, dit l'historien de l'Académie de sinon la primauté, du moins l'égalité d'invention. » L'obser est juste, mais Newton ne se borna pas à la vérification d il en donna l'explication.

« Si cette découverte se trouve juste, dit Dœrfel en ter

ude, il ne sera pas difficile à ceux qui sont exercés dans les ns coniques d'indiquer des méthodes de calcul pour la théo-s comètes, pour trouver la distance du sommet au foyer , et, par conséquent, le rapport du mouvement diurne dans ectoire, la distance à la Terre, etc. »

uvrage de Dœrfel n'avait fait aucune sensation lorsqu'il et était devenu extrêmement rare; ce n'est qu'en 1745 que n de l'auteur a été tiré de l'oubli.

RŒMER (OLAUS).

(Né à Aarhuus en 1644, mort à Copenhague en 1710.)

ıt initié aux Mathématiques par Erasme Bartholin. Il avait ıargé, jeune encore, de classer les manuscrits de Tycho-. Picard, qui s'était rendu en Danemark en 1671 pour r la position géographique d'Uranibourg, se trouva natu-ıent mis en relation avec lui; il l'employa dans ses recherches lécida à le suivre en France, où il lui fit obtenir la charge ofesseur de Mathématiques du dauphin. Leur amitié se per-. sans le moindre nuage jusqu'à la mort de Picard.

emer entra bientôt à l'Académie des Sciences et en fut l'un ıembres les plus illustres. Rappelé en Danemark en 1681, il chargé d'occuper la chaire de Mathématiques à l'Université, ıt bientôt après directeur des monnaies, inspecteur des arse-et des ports, conseiller d'Etat (1707), enfin premier magis-le Copenhague. Il avait visité en 1687 l'Allemagne, l'An-rre, la France et la Hollande, avec la mission d'y étudier les

arts et les manufactures. Il mourut de la pierre, dont il
cruellement pendant les trois dernières années de sa vie.

Ses principaux titres sont la découverte de la vitesse
lumière et l'invention de la lunette méridienne. Il s'était
temps occupé de trouver une preuve directe du mouvem
la Terre dans les parallaxes annuelles qu'il supposait
reconnaître au moins aux étoiles de première grandeur
parallaxes, dont on n'a même pas encore pu aujourd'hui
authentiquement l'existence, seraient en tout cas bien inf
aux limites des erreurs que comportaient forcément les
tions, au temps de Rœmer.

Le manuscrit du seul Ouvrage que nous ayons de R
été sauvé par Horrebov de l'incendie qui détruisit l'obs
de Copenhague le 20 octobre 1728. Tous les autres pap
Rœmer furent consumés; les instruments qu'il avait fa
struire furent totalement détruits.

Horrebov habitait un corps de bâtiment éloigné de ce
feu avait pris; il fit échapper ses huit plus jeunes enfants
avec sa femme et son fils aîné pour tâcher de préserver
qu'il pourrait des livres, des instruments et des manuscrits
parvint à enlever qu'un grand portefeuille contenant l'O
dont nous allons parler. Horrebov venait de perdre
effets, tous ses meubles; néanmoins, dans son malheur, il
cita d'avoir pu arracher au feu l'œuvre capitale de son

Le manuscrit de Rœmer n'était pas prêt pour l'impr
Horrebov le compléta et le fit paraître en 1736 sous le
Basis Astronomiæ.

Picard, Auzout, Huyghens venaient seulement d'imagi
premiers micromètres. Voici, suivant Horrebov, comme

s'y prenait pour construire le sien : « Il roulait un fil de lai-
ıutour d'un fil de fer un peu plus gros, en portant la plus
de attention pour empêcher que, dans cette opération, les
.e se tournassent et ne se courbassent en aucun sens, afin que
›ut ils fussent bien parallèles entre eux. Il soudait l'hélice
. formée à un cercle de laiton; ensuite, quand il voulait pla-
es fils dans un micromètre, il en retranchait, à intervalles
.x, un, ou deux, ou trois de suite. »

›ur graduer les cercles de ses instruments, il marquait des,
sions arbitraires, mais exactement égales, sauf à en déter-
er ensuite le rapport au degré. Il est, en effet, plus facile de
er des distances égales sur une ligne indéterminée que d'en
ser une, donnée de longueur, en parties égales.

›ur lire les divisions sur le limbe, il se servait d'un microscope
ile autour de l'axe de ce limbe et portant à son foyer onze
égalements espacés, qui formaient une sorte de vernier.

icard avait eu le premier l'idée de substituer les observations
idiennes, qui sont les plus sûres, à celles qu'on faisait
ıravant dans tous les verticaux. Rœmer avait particulière-
ıt apprécié les motifs de Picard; il l'avait aidé à établir son
le mural à l'Observatoire de Paris; il fit construire pour
›servatoire de Copenhague la première lunette méridienne
›n ait eue. Elle n'était pas telle qu'on les construit aujour-
ıi, mais se rapprochait davantage du cercle mural, l'axe hori-
tal autour duquel elle tournait entraînant dans son mouve-
ıt une alidade mobile sur un cercle vertical, de manière à
rnir les hauteurs méridiennes des astres à leurs passages.

›ans un Chapitre intitulé : *Terra mota, sive parallaxis orbis*
ui, ex observationibus Sirii et Lyræ, Rœmer dit : « Les

phénomènes s'expliquent également dans le
nic et de Tycho. La parallaxe seule pourrait
réelle (du mouvement de la Terre). La comp
vations à celles d'Hévélius m'a fait croire
parallaxe d'une minute ou deux; mais j'ai v
possible d'attribuer les différences aux erre
J'ai repris ce travail en 1692 et 1693, et je
avec plus de succès. Il m'a paru que la par
première grandeur ne dépasse pas une minu
la somme des parallaxes de Sirius et de la
nute. » Il se trompait évidemment. Mais ses
moins servi à constater l'immensité de la
sépare des étoiles. Au reste, les soins min
devait prendre pour déterminer, s'il y avait
annuelles des étoiles l'ont mis sur la voie d'u
qu'il n'eut pas à la vérité le temps de complé
il ne doit pas être considéré comme entièrem
voulons parler de l'aberration des étoiles. « Il
même Chapitre, des variations dans les dé
dépendent ni des réfractions ni des parallaxe
attribuer sans doute à quelque vacillation d
dont j'espère que je pourrai donner une théori
vations. » L'explication n'était pas bonne, m
du fait restait, et elle n'a pas été inutile à l
théorie de Bradley.

La plus belle découverte de Rœmer avait ét
L'*Histoire de l'Académie* la rapporte en c
22 novembre 1675, M. Rœmer lut une disser
pagation de la lumière. Il prouva par les imme

ons (des satellites de Jupiter dans le cône d'ombre projeté par planète) que cette propagation n'est pas instantanée. »

En 1695, Rœmer, présentant au roi Christian V l'almanach l'année, lui fit remarquer les inconvénients de conserver core le Calendrier julien. Le roi le chargea de s'entendre avec Suède pour l'adoption de la réforme grégorienne. Cette négo- :tion n'aboutit pas; mais le roi suivit l'avis de Rœmer pour ses ats. Le mois de février 1710 n'eut en Danemark que 18 jours.

Rœmer, pendant son séjour en France, avait eu à subir des aques violentes et absurdes de la part de La Hire. Cassini, qui uvernait l'Académie à cette époque, se montra également uste envers lui. Ces tracasseries ont probablement été pour ucoup dans la détermination qu'il prit de rentrer dans sa rie.

C'est Rœmer qui reconnut le premier que les profils des dents s engrenages cylindriques doivent affecter la figure d'épicy- ïdes. La Hire s'empara de l'idée, mais sans nommer Rœmer, ce détournement fut sans doute l'origine de sa haine contre stronome danois.

Newton et Jean Bernoulli, l'un dans le *Livre des Principes*, utre dans les *Leçons de calcul intégral*, s'occupèrent de la rec- ication et de la quadrature de ces courbes.

MAYOW (JEAN).

(Né dans le comté de Cornouailles en 1645, mort à Londres en 1679.)

Il pratiqua la médecine à Bath et à Londres. La Société royale admit au nombre de ses membres en 1678. Il fit une étude par-

ticulière de la respiration. Il enseignait qu'une partie de l'a[ir] qu'il appelle sel vital, s'unit aux molécules sulfureuses du s[ang] pour l'en débarrasser; que c'était cette combinaison qui arté[ria]lisait le sang veineux et que la respiration était la source de [la] chaleur animale.

« L'air, dit-il dans son *Tractatus quinque physico-mé[dici] quorum primus agit de sale nitro et spiritu nitro-aereo; sec[un]dus de respiratione;* etc. (Oxford, 1674), est tout à fait nécess[aire] à l'entretien de la flamme; toutefois ce n'est pas l'air tout e[ntier] qui entretient la flamme, c'est sa partie la plus active et la [plus] mobile; car, lorsqu'une flamme s'éteint dans un espace fermé[, il] reste encore beaucoup d'air qui n'a pas été détruit par la c[om]bustion. »

Ces judicieuses remarques passèrent inaperçues. Voici enc[ore] quelques passages éminemment remarquables :

« Bien que l'esprit de nitre (c'est le sel vital) ne provienne [pas] en totalité de l'air, il faut cependant admettre qu'une parti[e en] tire son origine. D'abord, on m'accordera qu'il existe que[lque] chose d'aérien nécessaire à l'alimentation de la flamme, car [l'ex]périence démontre qu'une flamme exactement emprisonnée [sous] une cloche ne tarde pas à s'éteindre, non pas, comme on le [croit] communément, par l'action de la suie qui se produit, mais [par la] privation d'un élément aérien. Dans un verre où l'on a fa[it le] vide, il est impossible de faire brûler, au moyen d'une lent[ille,] les substances même les plus combustibles. Mais il ne faut [pas] s'imaginer que l'élément igno-aérien soit tout l'air lui-mê[me;] non : il n'en constitue qu'une partie, la partie, il est vrai, la p[lus] active. D'un autre côté, il faut aussi admettre que les particu[les] igno-aériennes se trouvent également engagées dans le sel [...]

.tre, car un mélange de soufre et de nitre peut très bien être
flammé sous une cloche vide d'air, et ce sont alors les particules
no-aériennes du nitre qui font brûler le soufre. De même, dans
déflagration du nitre, les particules nitro-aériennes deviennent
ores par l'action du feu et entretiennent la combustion du
arbon.

« Dans la combustion produite par les rayons solaires (sous
ne cloche) ce sont les particules nitro-aériennes qui inter-
ennent exclusivement ; l'antimoine ainsi traité augmente de
oids ; il n'est pas concevable que cette augmentation de poids
uisse provenir d'autre chose que des particules igno-aériennes
ées pendant la calcination.

« L'usage de la respiration consiste en ce que, par le ministère
s poumons, certaines particules absolument nécessaires au
aintien de la vie animale, sont séparées de l'air et mêlées à la
asse du sang ; quant à l'air expiré, il a perdu quelque chose de
n élasticité. »

MM. Gaubert et Ledru ont donné en 1840 une traduction
ançaise des œuvres de Mayow.

LÉMERY (NICOLAS).

(Né à Rouen en 1645, mort à Paris en 1715.)

Fils d'un procureur au parlement de Normandie qui appar-
nait à la religion réformée, Nicolas Lémery fut élevé dans les
rincipes du protestantisme. Ses études terminées, il entra chez
n de ses oncles, pharmacien à Rouen, qui lui enseigna les pre-
iers principes de la Chimie et la pratique de la Pharmacie.

Mais la Science pure avait pour Nicolas plus d'attraits que
manipulations des apothicaires; aussi ne tarda-t-il pas à
donner l'officine du pharmacien pour le laboratoire du
Il vint à Paris et suivit d'abord les leçons de Christophe
qui occupait alors la chaire de Chimie au Jardin du roi.
Glazer était encore voué aux croyances alchimiques; il
des idées obscures, mystiques, où l'imagination avait plus
que la vraie Science. De plus il était d'un caractère peu
toutes causes qui ne contribuaient guère à lui attirer des
Après deux mois d'une fréquentation assidue, Lémery
Christophe Glazer et se mit à voyager. Arrivé à Montpellier
entra en qualité d'aide chez l'apothicaire Verchout, où il
trois ans. Durant ce temps, il eut la libre disposition du
toire de son maître. Pour subvenir aux besoins de chaque
il enseignait la Science qu'il cultivait avec tant d'ardeur.
les jeunes étudiants de la Faculté de Médecine, il recruta
tain nombre d'élèves, et bientôt ses leçons acquirent dans
pellier une grande notoriété, ce qui lui permit d'exercer
temps la Médecine sans être muni du diplôme de docteur.
avoir parcouru toute la France, il revint à Paris en
cette époque se tenaient dans la capitale des conférences
fiques qui, dit M. Cap (*Études biographiques*), « étaient
autant d'Académies secondaires, où les jeunes savants
étrangers venaient exposer les doctrines nouvelles et essayer
talents. » Les plus renommées et les plus fréquentées
celles de Justel, secrétaire du roi, de Bourdelot, médecin
prince de Condé. Lémery s'étant fait admettre dans ces réunions
eut occasion de faire connaître sa science, qui était déjà fort
due. Il noua en même temps des relations qui eurent sur la

sa carrière la plus heureuse influence. Il se lia successivement vec l'illustre botaniste Tournefort, le savant Régis, Duverney, ui Patin, etc. Bourdelot mit à la disposition de Lémery le labo-toire qu'il possédait dans l'hôtel du prince de Condé. Là, les çons brillantes qu'il fit devant un auditoire d'élite valurent à émery de nombreux succès et particulièrement l'amitié et l'es-me du célèbre vainqueur de Rocroi, qui l'admit dans son inti-ité. Ayant ouvert un laboratoire rue Galande, Lémery se fit ecevoir apothicaire et ouvrit des cours publics dans cette rue. ès le premier jour, il y eut foule à ses leçons : des étudiants, des ames, des grands seigneurs, des savants même, comme Rohault, ernier, Régis, Tournefort, accoururent entendre Lémery. Ce ui faisait surtout le succès de ses leçons, c'était la façon neuve t originale dont il enseignait la Chimie. « La Chimie jusque-là, it M. Cap, n'avait jamais été enseignée de bonne foi; quelque hose d'obscur et de mystique, dernières traces de l'alchimie es siècles précédents, était toujours mêlé à ses préceptes t semait d'entraves réelles les abords de cette science. » Lémery orta la lumière au sein de ce chaos; il dissipa l'obscurité des aits et du langage, et sacrifia résolûment le merveilleux au vrai. n même temps qu'il enseignait, Lémery exerçait la profession 'apothicaire; et là encore le succès vint couronner ses efforts. Fontenelle, dans l'éloge qu'il a fait de Lémery, nous apprend que les drogues qui sortaient de ses mains jouissaient, dans Paris, d'une vogue inouïe. On peut citer, entre autres, son fameux magistère de bismuth, l'émétique doux et l'opiat mésentérique, tous médicaments dont la préparation était connue de lui seul, et avec lesquels il faisait des cures merveilleuses.

Lors de la réaction religieuse qui devait aboutir à la révocation

e l'édit de Nantes, Lémery dut se défaire de sa charge d'apo
aire. L'électeur de Brandebourg lui fit offrir immédiatement
ıne place de chimiste à la cour de Berlin ; mais il refusa et
hercher un refuge en Angleterre. Là, il fut accueilli avec b
oup d'égards par le roi Charles II ; mais, prévoyant des trou
n Angleterre, il revint en France, et, vers 1683, se fit rec
locteur à la Faculté de médecine de Caen.

A Paris, où il revint s'établir, il ne put exercer la Méd
ιue jusqu'en 1685, époque à laquelle la révocation de l'é
Nantes interdit cette profession aux protestants. Il fit alors
:ours de Chimie, donna des leçons aux frères du marquis de
ȝnelay et à lord Salisbury.

Puis, protestant trop peu convaincu pour sacrifier plus l
:emps son intérêt à sa foi, il abjura le protestantisme et rep
›lein droit l'exercice de la Médecine et l'exploitation de sa
.ique d'apothicaire. En 1699, il succéda à Bourdelin, à l'A
démie des Sciences, comme associé chimiste. Il mourut en
:oudroyé par une attaque d'apoplexie.

Lémery s'est moins fait connaître par des travaux nou
ɜt par des découvertes que par sa manière d'exposer la Ch
Il s'est occupé particulièrement des sels extraits des végé
des encres sympathiques, des poisons, de la préparation des
dicaments et des produits pharmaceutiques tirés de l'antim
Dans ses recherches sur les sels des végétaux, Lémery signa
des premiers la distinction qu'il convient de faire entre la
sèche et la voie humide dans la Chimie végétale. Il pensait
raison que, dans les expériences chimiques, des degrés de ch
lifférents conduisent à des résultats différents. Aussi rec
nanda-t-il l'emploi du fourneau à réverbère, l'insolation,

de sable, de limaille de fer, de cendres, de fumier, de marc
in, de chaux vive, etc.

me plusieurs autres chimistes, Lémery avait constaté que
et le plomb augmentent de poids par la calcination; mais,
t fait aucune expérience à ce sujet, il avait, infidèle en ce
a méthode expérimentale, expliqué ce phénomène par une
fantaisiste.

également servir la chimie à l'explication des phénomènes
iques et météorologiques. Au moyen d'un appareil ingé-
connu sous le nom de *volcan de Lémery*, il rendait
e des volcans et des tremblements de terre : c'était un mé-
en parties égales de limaille de fer et de soufre pulvérisé,
isposé en forme conique, puis humecté d'eau, s'échauffait
ellement et finissait par s'enflammer.

r expliquer le phénomène du tonnerre et de l'éclair, il
na une expérience qui le conduisit à trouver « la vapeur
lève du mélange de fer, d'huile de vitriol et d'eau, et qui
mme au contact d'une bougie allumée », vapeur qui n'est
chose que l'hydrogène.

nery s'est beaucoup occupé de la préparation des diverses
sympathiques, qui, de son temps, étaient pour le public
jet de pure curiosité. Il indique notamment celle qui est
e par la dissolution du plomb dans l'eau-forte ou du bis-
dans le vinaigre.

aussi étudié avec soin les poisons minéraux et végétaux,
que les venins des animaux venimeux; par exemple : l'ar-
le sublimé corrosif, la ciguë, l'aconit napel, le venin de la
et du scorpion.

istoire des préparations antimoniales a été faite par Lémery

avec une clarté fort remarquable. Il remarque que l'an...
naturel est composé de soufre et d'une substance fort app...
d'un métal, qu'il nomme *stibium*. Il connaît donc parfa...
le sulfure d'antimoine, forme sous laquelle on rencontr...
moine dans la nature.

La présence du fer dans les cendres des végétaux a été...
pour la première fois par Lémery. Pour mettre ce métal...
dence, il se servait d'un couteau aimanté qu'il promen...
la masse des cendres, et il voyait ainsi toutes les partic...
fer s'attacher à la lame.

Il existe peu d'ouvrages scientifiques qui aient obtenu...
cès aussi éclatant que le *Cours de Chimie* de Nicolas Lé...
parut pour la première fois à Paris en 1675, sous ce titre...
de Chimie, contenant la manière de faire les opérations...
en usage dans la médecine, par une méthode facile, ...
raisonnements sur chaque opération, pour l'instruction...
qui veulent s'appliquer à cette Science. De 1675 à 17...
n'eut pas moins de douze éditions à Paris; la meilleu...
par Baron, a été publiée en 1756. A Amsterdam, à L...
Bruxelles, on en publia d'autres éditions françaises. ...
longtemps, le livre de Lémery fut le seul guide des ph...
et des chimistes. Il fut traduit en anglais (Londres, 167...
1698, 1720); en allemand (1698); en latin (Genève, ...
italien (Venise, 1763), et enfin en espagnol.

Les autres ouvrages de Lémery sont: *Pharmacopée uni...*
(Paris, 1697); *Dictionnaire universel des drogues simples...*
1698); *Traité de l'antimoine* (Paris, 1707), traduit en al...
par Malhern (Dresde, 1709); *Recueil nouveau des se...*
curiosités les plus rares (Amsterdam, 1709, 2 vol.). Lé...

en outre, dans le *Recueil de l'Académie des Sciences*, mémoires très importants : *Observation sur une extinc-* *voix guérie par les herbes vulnéraires* (1700) ; *Note sur* *taine pétrifiante des environs de Clermont en Auvergne* ; *Explication physique et chimique des feux souterrains*, *mblements de terre, des ouragans, des éclairs et du ton-* (1700); *Examen chimique des eaux de Passy* (1701); *vations sur le camphre et sa purification* (1701); *Sur un* *moniac naturel trouvé près du Vésuve* (1701); *Examen* *u minérale de Vézelay, en Bourgogne* (1701); *Examen* *u de Carensac* (1701); *Observations sur le miel et son ana-* 1706); *Examen d'une eau minérale découverte dans le* *urg Saint-Antoine, à Paris* (1706); *De l'urine de vache,* *analyse et de ses effets en médecine* (1707); *Mémoire* *ydromel vineux* (1707); *Observations sur la cire* (1708); *vations sur la manne* (1708); *Observations et expériences* *sublimé corrosif* (1709); *Notice sur les cloportes* (1709); *vations sur l'odeur développée pendant la précipitation* *r dissous dans l'eau régale par l'esprit de sel ammoniac* *le sel de tartre* (1712).

LEIBNIZ (GODEFROY, GUILLAUME).

(Né à Leipzig en 1646, mort à Hanovre en 1716.)

n père était professeur à l'université de Leipzig; il le perdit u'il n'avait pas encore six ans. Sa mère, femme de mérite, oin de son éducation.

lut avec avidité les livres contenus dans la bibliothèque de

ent les manuscrits inédits de Descartes et de Pascal, et, Malebranche, etc.

ons devoir reproduire ici une lettre où il raconte à istoire de son initiation aux Mathématiques :

je vins à Paris, en 1672, j'étais un géomètre *auto-*is peu expérimenté, n'ayant pas la patience de parcou- série des démonstrations. Etant enfant, j'avais étu- e élémentaire d'un certain Lauguis, puis celle de uant à celle de Descartes, elle m'avait paru trop diffi- st à cette époque que je découvris ma machine arithmé- st alors aussi que Huyghens, qui me croyait, je pré- capable que je ne l'étais, m'apporta un exemplaire du Ce fut pour moi le commencement ou l'occasion d'une métrique plus approfondie. Pendant que nous nous es, il me fit voir que je n'avais pas une notion assez centres de gravité; il me l'expliqua en peu de mots en ue Pascal avait très bien traité cette question..... Je sai- mpressement les conseils du grand mathématicien, car été facile de voir combien Huyghens était grand. Je me voir ignorer une telle chose, et, voulant étudier ient la Géométrie, je demandai à Huyghens de me prêter insi que Grégoire de Saint-Vincent. Sans aucun retard, les routes frayées par Vincent, et j'admirais les problèmes it entrepris, et qu'avait poursuivis Pascal. Je voyais avec es sommes et les sommes des sommes, les solides qui ient et leurs démonstrations. Tout cela me donnait plus r que de travail... Huyghens me conseilla de lire Des- ius, qui enseignent la manière de faire des équa- sans doute de trouver les équations des lieux), ce

it pa
nités in
l'anné
Leibniz
ps de s
n d'écri
ngagea
èces aut
as son z
u delà d
noyens
iques.
« Si les
nt presc
sion ?
« A l'ori
it d'abord
empératu
urface re
s débris
st résulté
« Par s
inégalem
taines po
d'autres
tagnes.
Leib
déplac
Ces

venu à la pleine conception de sa méthode de calcul
nal. Leibniz dit qu'il avait trouvé son nouveau calcul
ie 1674.

z, à Hanovre, fut d'abord détourné pendant assez long-
ses travaux scientifiques; il accepta notamment la mis-
ire l'*Histoire de la maison de Brunswick,* mission qui
dans une série de voyages nécessaires pour retrouver les
thentiques dont il avait besoin. Du reste, il ne marchanda
èle à son bienfaiteur, car il n'hésita pas à remonter bien
u déluge, dans le but, à la vérité, de se donner les
le produire ses idées au sujet des transformations géolo-

s grands ossements de la terre, ces roches impérissables,
sque entièrement vitrifiées, n'est-ce pas, dit-il, par la

rigine, le feu chassa dans l'air l'humidité, qui se conver-
rd en vapeurs aqueuses; par suite de l'abaissement de
ure, ces vapeurs se trouvant ensuite en contact avec la
efroidie de la terre, s'écoulèrent en eau, et l'eau, délayant
s de ce récent incendie, retint en elle les sels fixes, d'où
tée une sorte de lessive, qui a formé les mers.

suite du refroidissement du globe, les masses se sont
ient raffermies et ont éclaté çà et là, de sorte que cer-
ortions, en s'affaissant, ont formé des vallées, tandis que
plus solides, restant debout, constituèrent les mon-
»

iiz reconnaissait aussi les effets produits par le séjour ou le
ment des eaux.

ravaux entrepris sur commande ne l'avaient pas empêché

-dire telle qu'un corps pesant assujetti à la suivre s'élève baisse de quantités égales dans des temps égaux, problème Huyghens donna aussi la solution; et peu après celui de la e que doit suivre un corps pesant pour que sa distance à int fixe varie proportionnellement au temps.

même temps, il jetait de nouvelles lumières sur la théorie ement dite par divers articles publiés dans les journaux.

1690, il résolvait le problème de la chaînette, proposé rd par Galilée, et auquel Jacques Bernoulli l'engageait à quer le nouveau calcul.

1692, Leibniz inventait la théorie de l'enveloppe d'une e mobile, et Jean Bernoulli lui écrivait qu'il voyait bien dieu de la Géométrie l'avait admis plus avant que lui dans inctuaire.

marquis de l'Hospital exposait sa méthode dans un ouvrage itral et les Bernoulli l'illustraient par les plus belles décou- ;.

bniz jouissait en paix de sa gloire lorsque Fatio de Duiller, ivait alors en Angleterre, à l'ombre de Newton, présenta ci, en 1699, comme inventeur de l'analyse infinitésimale, int qu'il ignorait ce que Leibniz avait emprunté du pre- inventeur.

bniz en appela au témoignage de Newton, tout en rappelant es droits étaient reconnus dans une note du livre des *Prin-* mais Newton ne répondit pas.

l en 1711 reprit l'assertion de Fatio et accusa même direc- t Leibniz de plagiat.

bniz porta plainte à la Société royale de Londres, que on présidait depuis longtemps.

Newton fit nommer, pour examiner le débat, une com
qui rendit en 1712 un jugement inique, mais sans valeur
de la postérité.

Nous donnerons à notre tour notre sentiment au sujet
procès célèbre, tant de fois revisé depuis; mais, auparavant
résumerons aussi exactement qu'il nous sera possible,
nous l'avons fait pour Newton, celles des publications de
sophe allemand qui se rapportent aux Sciences.

Voici d'abord les titres de ces Ouvrages; nous les lais
l'ordre adopté par Dutens, qui est celui dans lequel ils
écrits.

Lettres diverses de Leibniz à Oldenbourg, à Collins et à
tirées du *Commercium epistolicum* de Collins (Londres
et du tome III des œuvres de Wallis. (Oxford, 1699.)

Lettres de Leibniz à Wallis. (1695-1699.)

Lettre à l'auteur du *Journal des Savants* sur le pri
justesse des horloges portatives. (Mars 1675.)

De vera proportione circuli ad quadratum circums
in numeris rationalibus. (*Acta Eruditorum*, 1682.)

De dimensionibus figurarum inveniendis. (*Acta Erudi*
1684.)

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tang
quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur,
gulare pro illis calculi genus. (*Acta Eruditorum*, 168

De dimensionibus curvilineorum. (*Acta Eruditorum*

Demonstratio geometrica regulæ apud Staticos re
de momentis gravium in planis inclinatis. (*Acta Erudit*
1685.)

Brevis demonstratio Erroris memorabilis Carte

um, circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo, em semper quantitatem motus conservari; qua et in re anica abutuntur. (*Acta Eruditorum*, 1686.)

ditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horum-su in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas ilioribus substituendas (*Acta Eruditorum*, 1686.)

Geometria recondita, et analysi indivisibilium atque infi-am. (*Acta Eruditorum*, 1686.)

resistentia medii et motu projectorum gravium in medio ente. (*Acta Eruditorum*, 1689.)

tamen de motuum Cœlestium Causis. (*Acta Eruditorum*,)

linea isochrona, in qua grave sine acceleratione descendit. *Eruditorum*, 1689.)

adratura arithmetica communis sectionum conicarum, entrum habent, etc. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

linea in quam flexile se pondere proprio curvat; ejusque isigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales arithmos. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

solutionibus problematis catenarii, vel funicularis a noullio propositi. (*Acta Eruditorum*, 1691.)

la chaînette, ou solution d'un problème fameux proposé alilée, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, son usage pour les logarithmes et une application à l'avan-t de la navigation. (*Journal des Savants*, 1692.)

linea ex lineis, numero infinitis ordinatim ductis inter se rrentibus formata, easque omnes tangente, ac de novo re Analysis infinitorum usu. (*Acta Eruditorum*, 1692.)

uvelles remarques touchant l'analyse des transcendantes,

différente de celle de la Géométrie de M. Descartes. (*Journ*
Savants, 1692.)

Generalia de Natura linearum anguloque contact
osculi, provolutionibus, aliisque cognatis et eorum usibus
nullis. (*Acta Eruditorum*, 1692.)

Supplementum Geometriæ practicæ sese ad prob
transcendentia extendens, ope novæ methodi generalis
series infinitas. (*Acta Eruditorum*, 1698.)

Règle générale de la composition des mouvements et
tions de cette règle à deux problèmes. (*Journal des Savants*

Supplementum Geometriæ dimensoriæ et multiplex
tructio lineæ ex data tangentium conditione. (*Acta Er*
rum, 1693.)

Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multi
linearum constructionem, ex data tangentium condition
Eruditorum, 1694.)

Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analys
naire et le nouveau calcul des transcendantes. (*Journ*
Savants, 1694.)

Constructio propria problematis de Curva isochrona
centrica, etc. (*Acta Eruditorum*, 1694.)

De novo usu centri gravitatis ad dimensiones, et sp
pro areis inter curvas parallelas descriptas, seu rect
curvilineis; ubi et de parallelis in universum. (*Acta Er*
rum, 1695.)

Sur les solutions par J. Bernoulli et Lhopital du probl
la courbe de plus rapide descente, avec la solution d'u
problème proposé par le même J. Bernoulli. (*Acta Erudit*
1697.)

:imen novum analyseos pro scientia infiniti, circa summas draturas. (*Acta Eruditorum,* 1703.)

tinuatio analyseos quadraturarum rationalium. (*Acta torum*, 1703.)

lineæ super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu te, motu provolutionis, et composito ex ambobus. (*Acta torum*, 1706.)

ibolismus memorabilis calculi algebraïci et infinitesi- in comparatione potentiarum et differentiarum; et de homogeneorum transcendentali. (*Miscellanea Beroli-*)

struction problematis ducendi rectas quæ tangunt lineas um gravitatis. (*Miscellanea Berolinensia.*)

amen de naturâ et remediis resistentiarum, quæ a cor- superincessu oriuntur. (*Miscellaneà Berolinensia.*)

ırticles assez nombreux que nous avons passés sous silence, font double emploi, ou se rapportent soit à des questions présentent plus aujourd'hui aucun intérêt, soit à une natique métaphysique à peine scientifique, ou enfin ont la querelle relative à l'invention du calcul infinitésimal. rons de ces derniers un résumé à part.

alyse de tous ces Ouvrages présente des difficultés parti- s qui tiennent à ce que ce sont des articles de revues et non ités en forme didactique; à ce qu'ils empiètent les uns sur res en même temps qu'ils contiennent de nombreuses ; à ce que les développements relatifs à la méthode n'y ésentés, la plupart du temps, qu'à propos des problèmes solution a exigé les perfectionnements correspondants; t surtout à ce qu'ils sont très négligemment rédigés, dans

les, mais dans des conditions où ce procédé n'était pas
es bases sûres.
·econnaît les droits de Mouton, mais il conteste la
applications qu'il fait de sa méthode.

le lettre est du 15 juillet 1674. Leibniz annonce qu'il
ruire une machine à calculs qui donne facilement le
ı nombre de dix chiffres par un nombre de quatre, en
; de roues, « sans aucun travail de l'esprit et sans qu'il
à faire d'addition ».
ju'il a trouvé que le segment d'une cycloïde, compris
rbe et la droite menée du sommet au point situé à une
la base égale au rayon du cercle générateur, est égal
lu carré construit sur le rayon de ce cercle.
me dépend d'une théorie qu'il fera connaître, dit-il,
aura le loisir.

troisième lettre, Leibniz annonce avoir fait une
némorable touchant l'évaluation des dimensions des
Vous savez que lord Brouncker et Nicolas Mercator
des séries indéfinies de nombres rationnels pour
l'aire de l'hyperbole (rapportée à ses asymptotes).
ne jusqu'ici n'a pu faire l'équivalent pour le cercle.
ɔuncker et Wallis aient proposé des suites de nombres
pprochant de plus en plus de sa surface, personne
'a donné une série indéfinie de nombres rationnels
ne soit exactement égale à la circonférence du cercle.
ls en ont donné l'un et l'autre, c'est sans s'en douter.
se m'a heureusement réussi, et la série à laquelle je

tre rendu plan, cependant il y aurait intérêt à l'établir
ne Euclide a démontré les incommensurabilités.
ous dites qu'un de vos compatriotes a observé qu'une des
les de Cardan donnait la racine d'une équation du second
. J'avoue que je ne l'admets pas et je demande des explica-

e ne vois pas qu'il soit bien difficile d'enlever les termes
médiaires d'une équation arbitraire d'un degré quel-
e. »
est probable que Leibniz s'exprime mal ici ou qu'il avait
ompris ce qu'Oldenbourg lui avait mandé.
l serait bien utile de pouvoir résoudre les équations au
n des tables de sinus; si toutefois le calcul n'exigeait pas
e préparation que l'avantage ne se réduisît à rien.
e crois que la méthode du très célèbre Newton, pour
er les racines des équations, diffère de la mienne. D'ailleurs
vois pas ce à quoi serviraient, dans la mienne, les loga-
es ou les cercles concentriques. Cependant, comme la
tion ne vous paraît pas sans valeur, je chercherai à la
dre et vous communiquerai la solution à laquelle je serai
nu, aussitôt que j'aurai assez de loisir. »
core une phrase imprudente. Mais Leibniz ne croyait qu'à
nveillance.
e suis tombé dernièrement sur une méthode très élégante au
en de laquelle des formules analogues à celles de Cardan
vent être accommodées aux équations de tous les degrés,
enées à une certaine forme, sans qu'il soit nécessaire de faire
araître tous les termes intermédiaires entre le premier et
nt-dernier, ni même aucun d'eux, pourvu qu'il existe

quelque relation entre les termes intermédiaires. Je vous en ferai part lorsque j'aurai aperçu le moyen de jeter quelque lumière nouvelle sur cette recherche.

Leibniz n'est jamais revenu sur ce sujet.

« Vous m'avez annoncé que vos compatriotes pour obtenir par approximations les dimensions de toutes les courbes, je voudrais savoir s'ils peuvent obtenir la longueur de l'ellipse et de l'hyperbole sans leurs quadratures.

« Je ne vous demanderai plus qu'une chose, c'est comment vous résolvez les équations par logarithmes. »

Dans sa cinquième lettre à Oldenbourg, en date du décembre 1675, Leibniz parle de recherches entreprises Tschirnhausen pour retrouver certains manuscrits de Roberval, de Pascal et de Fermat; il ajoute qu'on lui donne l'espoir d'avoir communication de quelques manuscrits de Pascal.

« Les éléments mathématiques de Jean Prestet ne contiennent rien de bien remarquable, si ce n'est que l'Arithmétique y est traitée par lettres. Il ne faut donc pas que vous pensiez que rien y ait été emprunté à vos compatriotes. La résolution des équations par sinus, par logarithmes ou par séries leur restera complètement.

« Je vous prie de me rappeler au souvenir de l'illustre Boyle toutes les fois que vous en aurez l'occasion. C'est l'un des hommes que j'estime le plus, à cause de ses vertus et de son savoir. J'ai lu dernièrement de lui une *Diatribe sur l'étude de la Théologie* qui n'est pas à mépriser, elle me confirme dans l'idée dont je vous ai déjà parlé de traiter les questions de l'âme par démonstrations géométriques... »

-ermine par l'annonce de quelques communications sur
· points des Mathématiques, mais sans entrer dans aucun
•

: vient se placer la première lettre adressée par Newton à
ɿiz par l'intermédiaire d'Oldenbourg. Elle est de juin 1676.
. y trouve la preuve que Newton était déjà à cette époque
ɔssession de ses méthodes pour obtenir les développements
ɜries des fonctions algébriques explicites ou implicites,
odes qu'il a plusieurs fois reproduites dans ses Ouvrages et
ɿous avons déjà fait connaître. Mais on y trouve aussi des
ɔsitions nouvelles : les développements en séries de quelques
ions circulaires, notamment

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots.$$

'emarquera que Newton laisse cachée la loi de formation des
cients de ces deux suites;) celui d'un arc d'ellipse, compté
.ne des extrémités du petit axe, en fonction de l'abscisse de
onde extrémité, et celui de cette abscisse en fonction de l'arc
ɿpondant; celui de l'abscisse d'une hyperbole équilatère
ɿrtée à ses asymptotes, en fonction de l'aire de la courbe; etc.
elques-uns de ces développements avaient déjà été obtenus
Aercator et James Grégory ; aussi Newton ne dit-il pas qu'il
.t l'inventeur; mais qu'ils ont été découverts *ab Anglis*.
ici au reste comment il s'exprime : « Quoique la modestie
ɜibniz lui fasse faire beaucoup de cas des recherches de nos

compatriotes sur les développements en séries infinies, do[illegible] commence à parler, je ne doute pas qu'il ne soit arrivé (com[illegible] l'affirme) à des résultats semblables et peut-être meilleurs. [illegible] comme il désire savoir ce qui a été inventé sur ce sujet p[illegible] Anglais, et que je suis tombé, il y a quelques années, su[illegible] spéculation, je vous adresse, pour satisfaire en partie à son [illegible] quelques-uns des résultats q[illegible] ont présentés à moi. »

La réponse de Leibniz es[illegible] août 1676 : on voit qu'[illegible] se fit pas attendre. Elle se[illegible]e entièrement des lettre[illegible] cédentes qui ne contenaie[illegible] affirmations sans preu[illegible] découvertes assez problémat[illegible] Leibniz montre clair[illegible] dans cette réponse, qu'il a, [illegible]es propres recherches, p[illegible] assez loin la méthode des dé[illegible]ments des fonctions en [illegible] pour pouvoir quarrer les c[illegible]lont ces fonctions repré[illegible] raient les ordonnées ; ses procédés ne valent pas ceux de Ne[illegible] il se fait d'ailleurs, comme on va le voir, une idée exagé[illegible] leur valeur, mais ils sont ingénieux.

« Vos lettres du 26 juillet contiennent sur l'Analyse beau[illegible] plus de choses mémorables que bien des volumes publiés su[illegible] matière. C'est pourquoi je rends grâces à vous, à Newton [illegible] Collins de m'avoir fait part de tant de méditations admirable[illegible]

« Les découvertes de Newton sont dignes du génie qu'[illegible] montré dans ses expériences relatives à l'Optique et dans la c[illegible] struction de son télescope catadioptrique.

« Sa méthode pour trouver les racines des équations e[illegible] aires des figures, au moyen de séries infinies, diffère de la mie[illegible] à ce point qu'il est permis d'admirer la diversité des chemins [illegible] lesquels on peut atteindre à un même but.

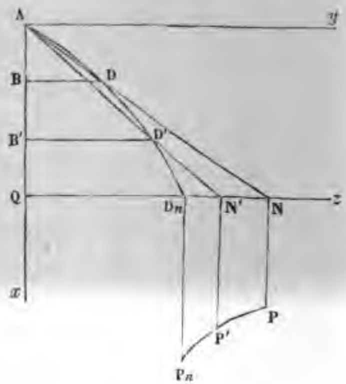
Mercator a enseigné à quarrer les courbes dont l'ordonnée xprimée rationnellement en fonction de l'abscisse, en y oyant des séries obtenues par divisions; Newton atteint le e but, pour toutes sortes de courbes, en extrayant des racines. néthode n'est qu'une application d'une doctrine générale ernant la transformation des figures, qui me permet, une e quelconque étant donnée, de la changer en une autre, ayant e aire, mais dont l'ordonnée ne s'élève tout au plus qu'au au carré, ou même au premier degré (*ut ordinatæ dimensio scendat ultra cubum aut quadratum, aut etiam simplicem tatem, seu infimum gradum*), de telle sorte que l'aire d'une e quelconque puisse être réduite en série par extraction racine carrée ou cubique, suivant la méthode de Newton, r simple division suivant celle de Mercator. »

wton trouvait très simple et très aisé d'extraire les racines de s les équations : Leibniz fait mieux, il abaisse toutes les équa-au troisième et même au premier degré. Les deux héros s'an-nt ainsi à qui mieux mieux les succès les plus invraisem-es; mais il y a toujours une grande différence entre les erreurs esquelles ils tombent respectivement : Newton se trompe sur eur pratique des méthodes qu'il propose, mais ces méthodes oujours raisonnables. En d'autres termes il a les solutions utes les questions possibles parce qu'il a pour toutes des odes qui, si on pouvait les employer, conduiraient au but. t à Leibniz, il entrevoit des moyens d'aborder les questions, ye ces moyens sur des exemples simples et, ayant réussi, andonne à son imagination et conclut à la certitude d'un s perpétuel.

ne s'arrête pas à l'abaissement au troisième degré, par rap-

port à l'ordonnée, par exemple, des équations de tou[tes] courbes, et va droit au but : « *Ex his transmutati[onibus] simplicissimam ad rem præsentem delegi. Per quam* [...] *unaquæque figura transformatur in aliam æquipollentem* [...] *nalem; in cujus æquatione, ordinata in nullam prorsus* [...] *potestatem : Ac proinde sola Mercatoris divisione per in*[...]

Fig. 15.



seriem exprimi potest. » C'est-à-dire : Parmi ces trans[forma]tions, je choisis la plus simple. Elle permet de change[r une] courbe quelconque en une autre équivalente, dans l'équati[on de] laquelle l'ordonnée n'entre plus qu'au premier degré : de s[orte] que son aire puisse être exprimée sous forme de série infinie, [par] une simple division.

Voici en quoi consiste ce procédé de transformation, le [j]e le répète, que Leibniz expose avec détails :

Soient (*fig.* 15) ADD' ... D_n la courbe proposée, rapporté[e aux] axes Ax et Ay; d'un point quelconque de cette courbe, Q

xiliaire, mené parallèlement à Ay, et N le point de ren- de AD avec $Q\zeta$; si l'on considère un second point D' de rbe proposée, que l'on refasse pour ce point les mêmes uctions, enfin que l'on élève en N sur $Q\zeta$ une perpendicu- P dont la longueur soit déterminée par la condition

$$NP.NN' = BD.BB',$$

l'on continue de même de proche en proche, le point P a une courbe $PP' \ldots P_n$ dont l'aire PND_nP_n sera bien à l'aire $DBQD_n$ de la courbe proposée. Mais la nouvelle e sera-t-elle plus facile à quarrer que l'ancienne?

ent

$$AB = x, \quad BD = y \quad \text{et} \quad QN = \zeta,$$

même,

$$AB' = x', \quad B'D' = y' \quad \text{et} \quad QN' = \zeta';$$

d'ailleurs

$$f(x, y) = 0,$$

ation de la courbe $AD \ldots D_n$, et

$$AQ = k.$$

ra déterminé par la proportion

$$\frac{QN}{BD} = \frac{QA}{BA},$$

$$\frac{\zeta}{y} = \frac{k}{x};$$

ra donc entre ζ et x l'équation

$$f\left(x, \frac{\zeta x}{k}\right) = 0.$$

Supposons qu'on puisse en tirer

$$x = \varphi(z),$$

et, par suite,

$$x' = \varphi(z').$$

BB' sera exprimé par

$$\varphi(z') - \varphi(z),$$

l'ordonnée NP $= u$ de la courbe PP' ... P_n sera donnée par l'équation

$$u(z - z') = [\varphi(z) - \varphi(z')]y = [\varphi(z) - \varphi(z')]\frac{z\varphi(z)}{k}$$

$$= [\varphi(z') - \varphi(z)]\frac{z\varphi(z)}{k},$$

d'où

$$u = \frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z' - z}\,\frac{z\varphi(z)}{k},$$

et en désignant par $\varphi'(z)$ la limite vers laquelle tendrait

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z - z'},$$

lorsque z' tendrait vers z,

$$u = \frac{1}{k}\varphi(z)\varphi'(z)z.$$

Tout ira donc bien si la fonction φ est rationnelle, mais le sera-t-elle?

Leibniz prend pour exemple celui où la courbe AD serait un quart de cercle : dans ce cas

$$y^2 = (2R - x)x;$$

par suite, comme $k = R$,

$$\frac{x^2 z^2}{R^2} = (2R - x)x$$

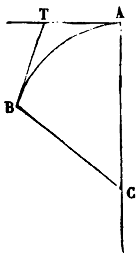
ıence,

$$x = \frac{2R^3}{R^2 + z^2},$$

vement rationnelle, mais qui ne se trouve telle que
courbe est du second degré et qu'elle passe d'ailleurs

hose vraiment remarquable dans ce passage est la

Fig. 16.



on analytique qu'effectue Leibniz. Il n'y attache
ent aucune importance; mais elle laissera des germes
son esprit.

onne ensuite, mais sans explications, quelques for-
ogues à celles que Newton lui avait adressées :
. 16) l'un des sommets d'une conique situés sur l'axe
centre, AB un arc quelconque de la conique, AT et
ntes en A et B; si l'on prend pour unité le rectangle
ni-axes et qu'on représente par t le rapport de AT à
ı secteur ACB sera représentée par

$$\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \ldots.$$

stimables que parce qu'elles développent l'art de l'in-
t perfectionnent l'esprit. Si ce qui précède paraît obscur,
cirai volontiers et j'expliquerai aussi comment on peut
er en séries les racines de toutes équations, sans aucune
n, ce qui paraîtra sans doute admirable.
s j'aurais désiré que l'illustre Newton expliquât un peu
plètement quelques-unes de ses opérations; ... »
'ai pas encore pu lire ses lettres avec le soin qu'elles
, parce que j'ai voulu vous répondre plus vite. Il en
ue je n'oserais pas dire si je pourrais suppléer à ce qu'il
né. Mais il serait préférable qu'il le fît lui-même; car il
ire que je ne saurais écrire rien que ne pût nous ensei-
homme dont les pensées sont si profondes. »
ssage qui termine la lettre est intéressant à plus d'un

e vois pas bien ce que vous paraissez dire que la plu-
difficultés (excepté les problèmes Diophantins) peuvent
aites par les séries. Il y a beaucoup de questions jugées
très difficiles, qui ne dépendent ni des équations (ordi-
ni des quadratures; telles sont, entre beaucoup d'autres,
ui dépendent de la méthode inverse des tangentes, que
s avoue ne pas posséder.
trouve dans sa correspondance une lettre à de Beaune où
ce de trouver quelques courbes proposées par celui-ci,
re autres dont la sous-tangente est constante. Ni Des-
i de Beaune, ni personne que je sache n'a trouvé cette
Cependant j'ai résolu le problème, *par une analyse cer-*
ussitôt que je le vis. Toutefois j'avoue qu'il me reste en ce
uelque chose de désirable à rechercher. *Mais en voilà*

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

›oler les aires des courbes

$$y = (1 - x^2)^{\frac{0}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{2}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{4}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{6}{2}},$$

$$\ldots;$$

;ont

$$x,$$

$$x - \frac{1}{3}x^3,$$

$$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7,$$

$$\ldots;$$

:ait les aires des courbes intermédiaires

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}},$$

$$\ldots;$$

a première est celle du cercle.

rriver à cette interpolation, je remarquai que, dans ıires, le premier terme était toujours x, et que les

était

$$\frac{\frac{1}{2}x^3}{3},$$

ıi

$$m = \frac{1}{2},$$

n résulta les termes

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = -\frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\,\frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128},$$

$$\ldots;$$

connus que l'aire cherchée du segment de cercle (compris es abscisses o et x) était

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \ldots.$$

t l'on trouve de la même manière l'aire de l'hyperbole

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

'el fut mon premier pas (*ingressus*) dans cette sorte de ches.

Iais, après avoir aperçu ces choses, j'en vins bientôt à consi-

seconds termes

$\frac{0}{3}$

étaient en progr
seconds termes des

« Quant aux
la progression a
ne s'agissait don
« Or, dans le
étaient les coef
$(1+1)$; c'est-à-c

« C'est pourqu
nombres, les derni
trouvai que, le s
produits par des

$\frac{m-}{1}$

« J'appliquai a
calaires que je c

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},$$
$$(1-x^2)^{\frac{2}{2}},$$
$$(1-x^2)^{\frac{4}{2}},$$
$$(1-x^2)^{\frac{6}{2}},$$
$$\ldots$$

$$1,$$
$$1-x^2,$$
$$-2x^2+x^4,$$
$$+3x^4-x^6,$$

rpolés, et par eux, les aires
ait qu'à omettre les déno
rmes représentant les aires
aires, savoir

$)^{\frac{1}{2}},$

$\frac{3}{2},$

$n,$

on successive des

3

…

to
nu

donna

« C'es
ces conc
inversem
ne pouv

exemple, on aurait

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \ldots,$$

$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \ldots.$$

$$1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \ldots.$$

tombai sur les développements des radi-
'e savoir extraire les racines.
·é ces choses, les autres ne pouvaient me
-s; car, pour faire la preuve des résultats
je fis le carré de

$$x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \ldots,$$

$$(1 - x^2),$$

s s'évanouissant d'eux-mêmes, par la conti-
et, de même, le cube de

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - \ldots$$

$$(1 - x^2).$$

ıe, pour arriver à une démonstration certaine de
e fus conduit, comme par la main, à essayer,
s séries que fournissent les racines de $(1 + x^2)$
s être extraites de la manière employée en
ore arithmetico), et la chose réussit bien (*et*
).

« Ces points bien établis, je négligeai dès lors l'interp des séries et je m'en tins à ces opérations, comme four des bases bien plus heureuses. Au reste, la réduction des tions par la division, qui est beaucoup plus facile, ne m' pas non plus ignorée.

« Mais alors j'entrepris bientôt la résolution des équatio tées (c'est-à-dire contenant l'inconnue à différentes puiss et je l'obtins. (Nous avons précédemment indiqué la m imaginée dans ce but par Newton.) D'où il fut facile d les ordonnées, les abscisses au toutes autres droites, com les aires des courbes, ou leurs arcs. Car rien autre chose résolution des équations ne pouvait arrêter dans le reto lignes, par lesquelles les aires et les arcs étaient détermi semble que Newton ici se laisse un peu entraîner par so gination.)

« Vers cette époque, la peste m'obligea de fuir et dé mes idées : j'ajoutai cependant à ce qui précède une manière, que je vais indiquer, de calculer les logarith nombres par l'aire de l'hyperbole, comme suit : ... »

Mais ce qui suit ne contient que des calculs numériques indication de méthode. Toutefois il est facile de voir que N quarre l'hyperbole $xy = 1$, rapportée à des axes rectang à partir de $x = 1$, dans les deux sens, au moyen de la form

$$S = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

qu'il aurait obtenue en quarrant séparément les courbes do ordonnées seraient les différents termes de

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots;$$

lonc les aires comprises entre les abscisses $x = 1$ et u moyen de leur somme et de leur différence, qui tivement

$$h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots$$

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4} + \frac{h^6}{6} + \dots;$$

nsi successivement

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}\,1,1 & \text{et} & \mathrm{L}\,0,9, \\ \mathrm{L}\,1,2 & \text{et} & \mathrm{L}\,0,8, \\ & \dots & \end{array}$$

mme

$$\frac{1,2 \times 1,2}{0,8 \times 0,9} = 2,$$

sément à obtenir

$$\mathrm{L}\,2;$$

mme

$$\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10,$$

ncore

$$\mathrm{L}\,10;$$

nte, ajoute-t-il, de dire les longs calculs que j'ai ache-s recherches; car, étant de loisir, je m'y délectais cer-trop. Mais, dès que parut l'ingénieuse *Logarithmo-* Nicolas Mercator (que je suppose avoir découvert sa vant moi), je commençai à m'occuper moins de ces posant ou qu'il connaissait déjà l'extraction des racines

et la réduction des fractions, ou que, ayant au moins
$\left(\frac{1}{1+x}\right)$, il trouverait certainement le reste
en âge de rien publier.

« Dans le temps toutefois que ce livre parut, je
à Barrow et à Collins un résumé de ma méthode
dans lequel j'avais déterminé les aires et les longueurs
les courbes et les surfaces des solides et tout ce
être compris entre des lignes données; et, réciproquement
aires ou longueurs étant supposées données, j'en
leurs extrémités. Et j'avais enrichi cette méthode
séries.

« L'habitude de nous écrire étant née de là, Collins
d'insister pour que je rendisse le public juge de mes
de sorte que, vers 1671, ayant pris en considération les
mes amis de publier le *Traité de la réfraction de la*
des couleurs, que j'avais alors en état, je commençai
occuper de nouveau des séries et j'en écrivis un Traité
publier en même temps.

« Mais, vous ayant écrit (c'est à Oldenbourg qu'il s'a
l'occasion du Télescope catadioptrique, une lettre dans
j'expliquais mes idées sur la nature de la lumière, inopi
quelqu'un fit (c'est sans doute Hooke) que je compris qu
important pour moi de vous prier de publier cette lettre en
Mais aussitôt de vives interpellations, venues de divers côt
détournèrent de mon dessein et firent que je m'accusai d'i
dence pour avoir perdu mon repos, chose si essentielle, en
sant l'ombre (*umbram captando*).

« Vers le même temps, Jac ry, au moyen d'

-es, que Collins lui avait transmise, parvint après beau-
efforts, comme il l'a écrit à Collins, à la même méthode
et en laissa un Traité que j'espère voir éditer par ses
ar, avec l'esprit inventif dont il était doué, il est impos-
'il n'y ait pas ajouté de son crû beaucoup de choses nou-
ont il importe que le souvenir soit conservé, dans
de la chose mathématique.

ant à moi, je n'avais pas encore achevé mon Traité
je renonçai à m'en occuper, et, depuis lors, il ne m'est
u à l'esprit d'y ajouter ce qui y manquait, parce que je
pas les éléments de la partie dans laquelle j'avais l'inten-
xpliquer la méthode pour résoudre les problèmes qui ne
se ramener aux quadratures, quoique j'eusse établi
chose de ses bases. (Newton veut évidemment parler ici
ur d'une équation entre la fluente, sa fluxion et la
, à l'équation correspondante entre les deux fluentes; mais
en éloigné de vouloir le dire, car on va voir qu'il ne
me pas encore annoncer qu'il sache tirer d'une équation
eux variables la fluxion de l'une d'elles par rapport à
Au reste, dans ce Traité, les séries n'obtenaient qu'une
art.

complis encore d'autres choses d'importance; je trouvai
ent une méthode pour les tangentes telle que celle que
vous communiqua il y a deux ou trois ans, mais (à
tion de Collins) vous m'écrivîtes alors que j'étais tombé
même méthode. Nous y étions parvenus de deux manières
tes. Car j'ai la démonstration de la méthode dont je me
quiconque la possède ne saurait déterminer autrement les
es, à moins qu'il ne veuille dévier de la voie directe.

entier e

mes, et
urbe; da

« Si $\frac{m}{}$

ourbe est
quement.

C'est u
où

est un no
Newton es

« Mais,
géométriq
aux sectio

« J'ai tr
quelques

Newto
d'une hy
construct
une dém
toujours

« Que
méthode
peuvent
hausen,
général

positif, le développement ne contiendra que $\frac{m+1}{n}$
u'ainsi on aura la quadrature géométrique de la
ce cas, en effet, l'intégration peut se faire.

- n'était pas entier et positif, j'en conclurais que la
ɜ celles qui ne peuvent pas être quarrées géométri-

:rreur, car il y a un autre cas d'intégrabilité : celui

$$\frac{m+1}{n} + p$$

ɔre entier. Toutefois le résultat auquel parvient
!éjà bien remarquable.

and une courbe de ce genre ne peut pas être quarrée
nent, j'ai en main des théorèmes pour la comparer
coniques ou à d'autres courbes simples.

vé aussi des règles pour les expressions trinômes et
res. »

ısse ensuite à la rectification géométrique (au moyen
ɔole) d'un arc de la cissoïde, mais il indique la
sans dire comment il y a été conduit. Il appelle cela
:ration *perbrevis :* elle l'est tellement qu'on ne voit
ce que Leibniz aurait pu y prendre.

.l reste bien des choses à examiner relativement aux
ıpproximation et aux divers genres de séries qui
·rvir, cependant à peine espérais-je, avec Tschirn-
n pût trouver d'autres bases plus simples ou plus
ır réduire les quantités en séries du genre dont nous

.ant à ce qui concerne la simplicité de la méthode, je ne
.s pas voir les radicaux ou les fractions développés en séries
oute réduction; au contraire, lorsqu'il s'y présente des
és composées, on peut essayer toutes sortes de réductions,
ajoutant ou retranchant aux variables, soit en les multi-
ou les divisant, soit encore par la méthode de transforma-
Leibniz, ou toute autre qui se présente. Alors la résolu-
séries par division ou extraction des racines deviendra
ne...

ilà ce qu'il y avait à dire des séries où n'entre qu'une
variable; mais la méthode permet aussi de développer les
tés qui dépendent de deux ou de plusieurs variables. Bien
n peut, par cette méthode, former, pour toutes les courbes,
ies analogues à celles que Gregory a données pour le
et l'hyperbole et dont le dernier terme fournit l'aire
e. Mais je ne voudrais pas entreprendre un calcul si long.
fin les séries peuvent encore être formées de termes com-
comme, par exemple, si l'ordonnée d'une courbe est

$$\sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}},$$

$$a^2 - ax = z^2,$$

yant la racine du binôme

$$z^2 + \frac{x^3}{a},$$

ve

$$z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} + \ldots,$$

ont tous les termes peuvent être quarrés. »

Si Newton avait dit comment, cela eût pu instruire l
Les termes en question contiennent tous, à leurs dénom
$\sqrt{a^2 - ax}$, on peut les rendres rationnels en faisant

$$x = a - \frac{u^2}{a},$$

mais l'emploi de cette méthode conduirait, dans d'autre
logues, à des fractions bientôt fort compliquées. Newton
dire qu'il savait en 1676 intégrer les fractions rationnelle
serait peu probable.

« Mais je fais peu de cas de ce procédé, parce que, le
séries ne sont pas assez faciles à traiter, j'ai une autre
que j'ai communiquée dernièrement (probablement à la
Royale) et qui conduit mieux au résultat : elle consiste
la courbe géométrique qui passe par un nombre quel
points donnés.

« Euclide enseigne à construire un cercle passant
points donnés; on sait aussi déterminer la conique qui
cinq points; on peut de même faire passer une courbe
sième ordre par sept points (car je pourrais donner la desc
toutes les courbes de cet ordre qui sont déterminées par se
seulement); cela se fait géométriquement sans aucun

« Mais le problème dont il s'agit est d'un autre g
quoique la chose, au premier abord, paraisse impossible
fait cependant, et c'est l'une des plus belles que j'aie dés
naître. »

Il s'agit évidemment ici de la méthode qui consiste à s
tuer une parabole à une courbe quelconque; quant à la
précédente, qui n'y a qu'un rapport éloigné, elle a

endue volontairement obscure, puisqu'il faut neuf points
éterminer une courbe du troisième ordre et que Leibniz
équence ne pouvait pas savoir pourquoi Newton ne s'en
t que sept.

y a quelques théorèmes ayant une certaine affinité avec
ue Leibniz propose en établissant sa série pour la quadra-
s sections coniques : j'en ai formé un catalogue pour la
aison des courbes avec les sections coniques.

puis en effet comparer géométriquement aux sections
es toutes les courbes en nombre infiniment infini dont les
ées sont

$$\frac{dx^{n-1}}{x^n + gx^{2n}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}n-1}}{x^n + gx^{2n}},\quad \frac{dx^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \frac{dx^{\frac{5}{2}n-1}}{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\overline{gx^{2n}},\quad dx^{n-1}\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}},\quad dx^{2n-1}\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{{}^{n-1}}{\overline{{}^{n}+gx^{2n}}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},\quad \ldots;$$

$$\frac{\sqrt{e+fx^n}}{+hx^n},\quad \frac{dx^{2n-1}\sqrt{e+fx^n}}{g+hx^n},\quad \frac{dx^{3n-1}\sqrt{e+fx^n}}{g+hx^n},\quad \ldots;$$

$$\frac{1}{\overline{e+fx^n}},\quad \frac{dx^{2n-1}}{(g+hx^n)\sqrt{e+fx^n}},\quad \frac{dx^{3n-1}}{(g+hx^n)\sqrt{e+fx^n}},\quad \ldots;$$

$$\frac{+fx^n}{+hx^n},\quad dx^{n-1}\sqrt{\frac{e+fx^n}{g+hx^n}},\quad dx^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fx^n}{g+hx^n}},\quad \ldots;$$

e soit n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Je
ue ces théorèmes ne pourraient que difficilement être

trouvés par des transformations de figures telles que cel[illegible] Jacob Grégory et d'autres se sont servis. »

Si Newton avait indiqué à Leibniz le principe de la tr[illegible] mation analytique au moyen de laquelle on peut ram[illegible] quadratures des courbes qu'il vient de dénommer à [illegible] sections coniques, la simple énonciation de ce principe [illegible] éclairer la route à suivre, mais la longue liste des exemp[illegible] cite ne pouvait servir qu'à dérouter son correspondant.

« Au reste, je n'avais pu, moi-même, arriver à auc[illegible] générale avant d'avoir renoncé à me servir des figures [illegible] par considération seulement des formules des ordonnées [illegible] suis arrivé à réduire la difficulté. Quoi qu'il en soit, les t[illegible] généraux énoncés plus haut, étant en mon pouvoir, on [illegible] tera pas, je pense, qu'il n'en soit de même de ceux qui [illegible] portent à des binômes plus simples, que l'on obtient en [illegible] nuls e, f, ou g, et supposant n égal à 1 ou à 2.

« Ces théorèmes fournissent des séries de plus d'une m[illegible]

Mais le texte en cet endroit est si peu clair que je [illegible] de me borner à le citer :

« *Nam primum* (il s'agit évidemment du premier ex[illegible] *ponatur* $f = 0$ et $n = 1$, *evadit*

$$\frac{d}{e + gz^2},$$

undè prodit series nobis communicata (d'où provient [illegible] qui m'est communiquée, par Leibniz évidemment.[illegible] *ponatur* $2eg = f^2$ *et* $n = 1$, *inde tandem obtinerem* ser[illegible]

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

ongitudine quadrantalis arcus, cujus chorda est unitas. »
u reste, je considère la chose autrement : ces propositions
et sont meilleures qu'utiles et le problème peut être résolu
moins de peine. C'est ainsi que l'équation

$$x^3 - x = 1$$

t plus simple que

$$y^2 - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{20}} = 20.$$

ndant il est clair que celle-ci est plus simple que la première,
que le géomètre peut en tirer plus facilement la valeur de
nnue.

C'est par une raison semblable que, pour obtenir les arcs de
, ou, ce qui revient au même, les secteurs des sections
ues, je préfère les séries composées des puissances des sinus.
Car si l'on voulait calculer, avec vingt décimales, la lon-
du quadrant, au moyen de la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots,$$

drait en employer environ 5 000 000 000 de termes, pour
uation desquels mille ans suffiraient à peine, et le calcul se
encore plus lentement au moyen de la tangente de 45°.
Tandis que, si l'on se sert du sinus droit de 45°, il suffira de
ante ou soixante termes de la série

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896} + \dots\right),$$

calcul je pense demanderait seulement trois ou quatre jours.
Mais ce n'est pas encore là le meilleur moyen pour calculer

la circonférence entière : la série qui donne l'arc de 30° e
tion de son sinus fournira en effet cet arc beaucoup plus
« Il ne serait pas plus difficile d'avoir l'aire du cercl
comme j'ai fait ce calcul, il me paraît bon de le rappor
joignant l'aire de l'hyperbole, qui se trouve de la même
« Supposant le diamètre du cercle, ou l'axe transvers
perbole égaux à 1 et le sinus verse ou la flèche du segme
à x, le demi-segment de l'hyperbole ou du cercle sera

$$x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x \pm \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72} - \dots\right).$$

« Je crois que Leibniz, lorsqu'il a établi sa série pour
mination du cosinus en fonction de l'arc, n'a pas fait
que c'est la même que j'ai donnée pour le sinus verse.
« Il ne semble pas non plus avoir remarqué que j'ai l'h
pour diminuer le nombre des cas, de laisser aux variab
signes, tout en les représentant toujours par la même lett
l'aire de l'hyperbole $xy = 1$, comptée de $x = 1$, est pos
négative selon que le segment est à droite ou à gauche
donnée correspondante, mais je la représente dans les
par la même lettre. »

Suivent différentes autres remontrances à Leibniz, puis N
revient, pour la compléter, sur sa méthode de constructio
table des logarithmes hyperboliques, qu'il a déjà indiqu
cette même lettre, et sur la manière de calculer les élément
table des sinus. Il reprend ensuite l'explication de sa m
pour développer en séries les racines d'une équation à de
riables. Enfin, considérant l'égalité entre une fonction
développement en série comme une équation entre la va

endante, regardée maintenant comme inconnue, et la fonc- considérée comme donnée, il résout cette équation en sens se.

exemple, de l'équation

$$z = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

représente l'aire de l'hyperbole $xy = 1$, comprise entre les nées correspondant à 1 et à x, il tire

$$x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 - \ldots,$$

proximè.

es séries formées à l'aide d'une variable peuvent, de la manière, être transportées à une autre. Ainsi l'arc z cor- dant à un sinus x étant

$$x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \ldots,$$

e de là la valeur du même arc en fonction de la tangente :

$$t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \ldots.$$

Mais, si l'on me demandait de trouver l'arc en fonction de gente, je ne me servirais pas de ce détour, mais je cher- is la chose directement.

On tire aussi de là le moyen de développer en séries les ions de plusieurs variables, et les racines des équations ées en sont en grande partie extraites, mais, pour ce dernier , je préfère la méthode que j'ai indiquée dans ma précédente , comme plus générale et un peu plus expéditive, si l'on

tient compte des règles pour l'élimination des termes s…

« Quant au retour des aires aux lignes droites (ce s… coordonnées de la limite supérieure) et autres problè… logues, on peut employer les théorèmes suivants.

Théorème I.

Soit

$$z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots;$$

on aura réciproquement

$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 + a^2d}{a^7} \ldots$$

$$+ \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 + \ldots$$

Théorème II.

Si

$$z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \ldots,$$

on aura réciproquement

$$y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}} \ldots$$

$$+ \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \ldots$$

« Il y a une autre méthode pour le retour des aires au… droites, mais j'ai résolu de la tenir secrète.

« Lorsque j'ai dit que presque tous les problèmes étai… lubles, j'ai voulu parler surtout de ceux dont se sont o… jusqu'ici les mathématiciens, ou sur lesquels les raisonn…

-matiques peuvent avoir prise. Car il est possible d'en ima-
où se trouvent impliquées des conditions assez perplexes
que nous ne puissions même les comprendre et bien moins
supporter le poids des difficultés qu'ils comporteraient.
ependant pour ne pas paraître avoir annoncé plus de choses
n'en pourrais faire, j'ai la solution du problème inverse
ngentes et d'autres encore plus difficiles, et, pour les
dre, je me suis servi de deux méthodes, l'une plus particu-
t l'autre plus générale : il me paraît bon de les consigner
et l'autre dès maintenant, par lettres transposées, ***ne propter***
idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer :
cdœ1oe2fh12i4l3m1on6o2qr7i11t1ov3x : *11ab3c2d1oeœg*
4m7n6o3p3q6r5f11t7uvx,3acœ4egh6i4l4m5n8oq4r3s6t4v
œ5e3i2m2n2op3r5s2t2u (1).
e problème inverse des tangentes, lorsque l'on donne la
eur de la tangente entre le point de contact et l'axe de la
(l'axe des x) ne demande pas l'intervention de ces mé-

Wallis, qui avait reçu communication de la traduction de ce logogriphe,
nnée plus tard ; la voici :
methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione involvente fluxionem ejus : Altera tantum in assumptione seriei pro tate qualibet incognita, ex quâ cœtera commode derivari possunt, et datione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos os assumptæ seriei.
st-à-dire : l'une des méthodes consiste à extraire une fluente de tion qui la contient avec sa fluxion : l'autre à exprimer l'inconnue ne série d'où l'on puisse tirer aisément tout le reste, et dans un arran-t des termes de l'équation, qui facilite le calcul des termes de la série.
peut vérifier que cette traduction contient bien, dans chacun des res de la phrase, le nombre de chacune des lettres indiqué dans amme.

thodes (parce que l'équation du problème, qui est

$$y\sqrt{1+y'^2}=a,$$

ne contient pas x et que, par suite, x est donné en fonct
par une quadrature; mais Newton ne le dit pas parce
tient pas à être clair); cependant la courbe est mécani
détermination dépend de l'aire de l'hyperbole. (Car

$$x=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.)$$

« Il en est de même du problème où l'on donne la
de l'axe (des x) comprise entre la tangente et l'ordonnée.

« Mais il en est autrement lorsque la portion de l'axe,
à un point quelconque (et au pied de la tangente) entre
lien : (racine, etc.).

« Il me sera très agréable de recevoir communicatio
méthode de Leibniz pour résoudre les équations affectées
l'explication du cas où les indices des puissances sont
naires, comme dans l'équation

$$20+x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{7}{11}}=0;$$

ou sourds (irrationnels) comme dans celle-ci :

$$\left(x^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{3\frac{2}{3}}}=y;$$

la chose, je crois, est évidente par ma méthode; autre
l'expliquerais.

« Mais il est temps de mettre un terme à cette lettre
celle du très excellent Leibniz était assurément dign
réponse aussi complète. »

te longue lettre contient bien des affirmations exagérées et oup de vanteries; mais nous ne voulons pas la discuter.

us nous bornons à remarquer qu'il en résulte bien nette- :

Que, dès avant 1676, Newton était en possession du calcul uxions, direct et inverse, et que, par conséquent, il a, dans *ivre des Principes,* ainsi que dans sa théorie de la lumière, tairement déguisé ses méthodes d'invention;

Qu'il n'a absolument rien communiqué à Leibniz de sa ode des fluxions.

is nous allons voir que, tandis que Newton cachait sous des ammes impénétrables ses découvertes concernant la théorie uxions ou des dérivées, Leibniz lui exposait naïvement sa ode différentielle, non pas, bien entendu, complète, il l'a ctionnée depuis, mais déjà très avancée.

lettre adressée sur ce sujet par Leibniz à Oldenbourg, pour ommuniquée à Newton, est de juin 1677.

'ai reçu votre lettre, longtemps attendue, avec celle assuré- très belle de Newton qui y était incluse.

'ai eu beaucoup de plaisir à apprendre par quelle voie il est nu à ses élégants théorèmes. Ce qu'il dit des interpolations allis m'a aussi beaucoup plu, parce qu'on a ainsi une dé- stration de ces interpolations qui, auparavant, ne parais- t résulter que d'une simple induction; une partie s'en trouve ie par les tangentes.

Je conviens avec Newton que la méthode de Sluze pour les entes n'est pas complète; et déjà depuis longtemps j'ai traité estion d'une manière bien plus générale par les différences

des ordonnées, au moyen de ce principe que la sous-tang…
à l'ordonnée comme la différence des abscisses est à …
ordonnées, quel que soit l'angle que les ordonnées fass…
l'axe, d'où il résulte qu'il n'y a, pour trouver les tangent…
rechercher les différences des ordonnées, celles des absciss…
si l'on veut supposées égales. »

Leibniz veut dire par là : la différence des abscisses é…
d'avance et la même pour toutes les courbes. Dans ce…
suivre, il figure l'égalité par un signe qui ressemble à u…
juscule, et, d'autre part, il écrit $d^{-}x$, $d^{-}y$, au lieu de dx…
c'est-à-dire qu'il n'était pas encore fixé sur le choix de s…
tions, mais cela importe peu.

« De là en nommant dy la différence entre deux or…
voisines (*proximarum*) et dx la différence entre les absc…
est évident que

$$d(y^2) = 2y\,dy$$

et

$$d(y^3) = 3y^2\,dy$$

et de même ensuite.

« Car, soient deux ordonnées voisines, c'est-à-dire ayant…
différence infiniment petite (*differentiam habentes infini…
vam*), savoir

$$y \quad \text{et} \quad y + dy,$$

puisque $d(y^2)$ est la différence des quarrés de ces deux dr…

$$d(y^2) = y^2 + 2y\,dy + (dy)^2 - y^2$$

ou, en omettant $y^2 - y^2$, qui se détruisent, ainsi que le …
de la quantité infiniment petite, par les raisons énoncées d…
théorie des maximums et des minimums,

$$d(y^2) = 2y\,dy;$$

ıême pour les autres puissances.

ꝫ là aussi on peut tirer les différences des quantités pro- par multiplication. Ainsi

$$d(yx) = ydx + xdy$$

$$d(y^2x) = 2xydy + y^2dx.$$

n trouvera par là aussitôt la tangente à la courbe

$$by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 + \ldots = 0,$$

xemple, car l'équation convenant aussi bien au point $dx, y + dy)$ qu'au point (x, y), en remplaçant dans cette ion x par $x + dx, y$ par $y + dy$, développant les calculs et ıant, il viendra

$$= \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy + \ldots}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 + \ldots} = - \frac{\text{ordonnée}}{\text{sous-tangente}},$$

i s'accorde avec la règle de de Sluze.

Mais ma méthode va beaucoup plus loin; non seulement elle s'appliquer au cas de plus de deux variables (ce qui est sou- rès utile), mais aussi lorsque interviennent des irrationnelles, e l'arrêtent en aucune façon; et il n'est pas nécessaire de disparaître ces irrationnelles, ce qui est indispensable pour uer la méthode de de Sluze, et augmente immensément les ıltés de calcul.

Pour le faire voir, il suffit de considérer les irrationnelles les ımples; or, si l'on prend x^z, on aura

$$d(x^z) = zx^{z-1}dx,$$

xemple

$$d(\sqrt[2]{x}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

aura de même

$$d\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots}=\frac{bdy+2cydy+\ldots}{3\sqrt[3]{(a+by+cy^2+\ldots)^2}}$$

« La même méthode peut encore s'appliquer quand
quation comporte des radicaux superposés. »
Leibniz fait en effet le calcul sur l'équation

$$a+bx\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}+hx^2y\sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}}=$$

emploie ici la singulière figure ⌒ pour exprimer la m
tion.

« Il est extrêmement remarquable que dx et dy sont t
égagés (*semper extant extra vinculum irrationnale*).

« Je pense que ce qu'a voulu cacher Newton en ce qui co
s tangentes, ne s'éloigne pas de ce que je viens de dire. »

La suite de la lettre concerne les quadratures et les sér
marque cette phrase :

« Toutes les courbes dont l'équation est différentielle
uarrables; celle dont elle est dérivée exprimait l'aire.

« Ainsi l'aire de la courbe

$$x=\frac{b+cy+dy^2+ey^3+\ldots}{2\sqrt[2]{1+by+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{3}y^3+\frac{e}{4}y^4+\ldots}}$$

st

$$\omega=\sqrt[2]{1+by+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{3}y^3+\frac{e}{4}y^4\ldots\ldots} \text{ »}$$

Mais le texte, en cet endroit, est à peu près inintelligible, p
ue au lieu de $2\sqrt[2]{1+by+\ldots}$, on a écrit $z\sqrt[z]{1+by+\ldots}$
Il est vrai que Leibniz pourrait bien avoir commis par inad

a faute de croire

$$d(\sqrt[n]{x}) = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}};$$

ute se retrouve en effet plusieurs fois dans le texte. Je l'ai
ée plus haut dans la différentielle de $\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots}$,
ait écrite sous la forme

$$\frac{bdy+2cydy+\ldots}{3\sqrt[3]{a+by+cy^2+\ldots}};$$

elle est encore reproduite dans l'exemple suivant, ce qui fait
n'ai pas transcrit le résultat.

in de la lettre, ainsi qu'une dernière, en date de juillet 1677,
nnent des demandes d'éclaircissements sur différents points
communication précédente de Newton.

si, en résumé, Newton n'a rien communiqué à Leibniz
ant le calcul des fluxions; Leibniz lui a transmis sur le
l différentiel une note absolument explicite et bien supé-
e, tant pour le fond que pour la forme, à ce que contient le
e *des Principes* sur les *moments* ou *incréments*. Et c'est
niz qu'on accuse de plagiat!

ndis que Newton écrit assez dédaigneusement dans le *Livre*
Principes que Leibniz lui a communiqué une méthode
ochant de la sienne, Leibniz proclame dans tous ses écrits,
sans en avoir eu aucune preuve avant 1704, que Newton
ussi bien que lui-même en possession de la méthode diffé-
elle. Newton fait retirer d'une nouvelle édition du *Livre des*
cipes la reconnaissance des droits de Leibniz et, lors du
s, va jusqu'à dire : « A l'égard du scholium qui est mis à la

·désigne le rapport au demi-axe focal de la portion de la tan-
e menée au sommet considéré, comprise entre ce sommet et
ngente à la seconde extrémité de l'arc, en supposant d'ailleurs
l'unité de surface fût le rectangle *ab* des demi-axes de la co-
:e; les signes supérieurs convenant au cas de l'hyperbole et
ignes inférieurs au cas de l'ellipse.

r si l'on suppose que la conique soit un cercle et que le
:ur en soit un quadrant, le rapport t est alors égal à 1 et
e de ce quadrant rapporté au quarré construit sur le rayon

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,$$

; la même série représente aussi bien l'aire entière du cercle
orté au quarré construit sur le diamètre.

uadratura arithmetica communis sectionum conicarum, centrum habent, etc., c'est-à-dire : *Commune quadrature ımétique des sections coniques à centres, etc.* (*Acta Erudi- m*, 1691.)

ous trouvons dans cet article, outre les formules contenues
le précédent, les développements en séries du sinus droit
ı sinus verse :

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

$$\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots;$$

i que ceux du logarithme hyperbolique de $(1+n)$ en fonction

de n, et de n en fonction du logarithme représenté par l

$$l = \frac{1}{1}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \dots,$$

et

$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \dots.$$

Mais les démonstrations manquent. Nous avons déjà tro développements dans une des lettres adressées par Le Newton. Leibniz, qui sans doute les avait trouvés seul donne plus comme étant de lui, mais comme ayant été par lui, par Mercator, par Newton et par Gregory. Elles ser dit-il, de tables trigonométriques, car il n'est pas toujo sible d'emporter ces tables par mers et par terres (*neq semper tabulas per maria et terras circumferre in potest*

L'article se termine par les solutions de différents pro relatifs à la navigation : En supposant que le navire ait sous le même rumb de vent, c'est-à-dire que le sillage ait c une inclinaison constante sur les méridiens successifs, tr chemin parcouru lorsque l'on connaît les latitudes extrêm rumb de vent; trouver la différence des longitudes extrêm

Leibniz établit les formules intégrales des inconnues e loppe ces intégrales en séries.

Supplementum Geometriæ practicæ sese ad problemata cendentia extendens, ope novæ methodi generalissim series infinitas, c'est-à-dire : *Supplément de Géométrie pra s'étendant aux problèmes transcendants, par le moyen méthode nouvelle et très générale par les développem séries.* (*Acta Eruditorum*, 1693.)

méthode que propose ici Leibniz est celle des coefficients minés.

m'a, dit-il, paru possible de trouver plus commodément, une méthode plus générale, les séries découvertes par Mer- t par Newton au moyen de divisions et d'extractions de , en supposant ces séries comme si elles étaient connues, n déterminant successivement les coefficients. La méthode cira par un exemple simple mais approprié à la question, rchant le logarithme d'un nombre et le nombre correspon- un logarithme.

it le nombre

$$\frac{a+x}{a},$$

garithme est

$$y=\int\frac{dx}{a+x},$$

nséquent

$$dy=\frac{dx}{a+x}.$$

ésulte

$$a\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a+x} \quad \text{et} \quad x\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a+x},$$

$$a\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=1.$$

nc

$$y=bx+cx^2+ex^3+fx^4+\ldots,$$

a

$$\frac{dy}{dx}=b+2cx+3ex^2+4fx^3+\ldots,$$

substituant dans l'égalité précédente, il viendra

$$\begin{aligned}1 = ab &+ 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 + \ldots\\ &+ bx + 2cx^2 + 3ex^3 + \ldots,\end{aligned}$$

égalité qui devra avoir lieu quel que soit x. D'où résulte

$$b = \frac{1}{a}, \quad c = -\frac{1}{2a^2}, \quad e = \frac{1}{3a^3}, \quad f = -\frac{1}{4a^4}, \dots$$

c'est-à-dire

$$y = L\left(\frac{a+x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \dots$$

Leibniz trouve

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \dots,$$

mais il n'arrive à ce résultat qu'à la suite de plusieurs confusions.

En premier lieu, ce qu'il entend par le logarithme c'est l'aire de l'hyperbole $XY = a^2$, comprise entre les $X = a$ et $X = x$; c'est pourquoi il pose, *ob quadraturam hyperbolæ*,

$$y = \int \frac{a^2dx}{a+x};$$

mais il en conclut

$$dy = \frac{a\,dx}{a+x},$$

ou

$$\frac{a\,dy}{dx} + \frac{x\,dy}{dx} - a = 0,$$

de sorte qu'il pose

$$\left.\begin{array}{l} a(b + 2cx + 3aex^2 + \dots) \\ + x(b + 2cx + 3aex^2 + \dots) \\ - a \end{array}\right\} = 0,$$

d'où il tire

$$b = 1, \quad c = -1, \quad e = 1, \quad \dots$$

›n hypothèse, il aurait dû trouver

$$y = a\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \cdots\right).$$

re de même, par le moyen de fautes analogues, que si y est
ithme de $\frac{a+x}{a}$,

$$x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2.a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \ldots.$$

sse de là au développement du sinus en fonction de l'arc.
y l'arc, x le sinus droit et a le rayon : on a évidemment

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2.$$

n différentiant par rapport à y,

$$a^2 dx d^2x + x dx dy^2 = 0,$$

$$a^2 d^2x + x dy^2 = 0,$$

dire

$$x + a^2 \frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

: on pose

$$x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 + \ldots,$$

:

$$\left.\begin{array}{l} by + cy^3 + ey^5 + fy^7 \ldots \\ + a^2(3.2.cy + 5.4.ey^3 + 7.6.fy^5 + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

qui doit avoir lieu identiquement. Il en résulte, en fai-
$=$ 1, comme cela doit être,

$$\frac{1}{1.2.3a^2},\ e = \frac{1}{1.2.3.4.5a^4},\ f = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7a^6}, \ldots$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\frac{\left(\frac{y}{a}\right)}{1}-\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7}$$

Leibniz termine par la recherche de l'équation de la telle que le rectangle compris entre la tangente et une co soit égal au quarré de l'ordonnée moins le rectangle de l' et de l'ordonnée. L'équation différentielle de cette courbe

$$ay\frac{dx}{dy}=y^2-xy,$$

c'est-à-dire

$$a\frac{dx}{dy}=y-x.$$

Si l'on pose

$$x=by+cy^2+ey^3+fy^4+\ldots$$

on trouve aisément

$$b=0,\quad c=-\frac{1}{2a},\quad e=\frac{1}{2.3.a^2}\cdots,$$

et il en résulte, pour l'équation de la courbe,

$$\frac{x}{a}=\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^2}{1.2}-\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{1.2.3}+\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

Leibniz a trouvé ailleurs que si y est le logarithme de est fourni par le développement précédent : il en conclut la de la courbe et termine par cette remarque que les dév ments en séries peuvent quelquefois permettre de décou valeur transcendante d'une inconnue.

dimensionibus figurarum inveniendis ou *de la mesure des* *s* (*Acta Eruditorum*, 1684.), et *De Geometria recondita* *lysi indivisibilium atque infinitorum*, ou *De la nouvelle* *étrie et de l'analyse des indivisibles et des infinis.* (*Acta* *itorum*, 1686.)

is ces deux articles qui tendent au même but et dont le l a en partie pour objet de rectifier quelques erreurs con- s dans le premier, Leibniz prend d'abord à partie Descartes avoir rejeté de la Géométrie les courbes qui ne peuvent être entées par des équations ordinaires entre les deux coor- es. Il voit là une erreur de notre philosophe, comme si n n'était pas libre de circonscrire l'objet de ses études, en nt aux autres la faculté de l'étendre. Mais il propose avec de nommer algébriques, plutôt que géométriques, les es dont les équations ont des degrés déterminés, et transcen- s les autres.

se propose ensuite de rechercher les courbes algébriques les quadratrices seraient elles-mêmes algébriques. Il entend uadratrice d'une courbe une autre courbe telle que le rec- e de son ordonnée et d'une longueur fixe resterait constam- égal au segment de la proposée, compris entre une ordonnée t l'ordonnée correspondant à l'abscisse considérée de la qua- ce.

croit résoudre la question en prenant successivement les ions les plus générales des courbes de tous les degrés, for- celles des courbes quarrables par celles-ci et cherchant à ifier l'équation de la courbe qu'on voudrait quarrer à l'une les qu'on aurait trouvées quarrables. Inutile de dire qu'il se

borne à conseiller cette méthode; quant à la suivre, il s[...] sur un seul exemple et se trompe.

Nous remarquons dans le second article le premier emploi [...] ait été fait du signe d'intégration, et l'équation de la cy[cloïde] écrite sous la forme

$$y = \sqrt{x2 - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Dans cette équation les abscisses x sont comptées perpendi[culai]rement à la base de la cycloïde et le rayon du cercle géné[rateur] est pris pour unité.

On voit que Leibniz connaissait en 1686 la différentielle [d'un] *arc sinus* ou d'un *arc cosinus*. Nous avons vu que la for[mule] de la fluxion correspondante ne se trouve ni dans le livre [des] *Principes de la Philosophie naturelle*, ni dans l'*Optique* [de] Newton.

Nous passons aux Ouvrages de Leibniz qui se rapportent [à la] Mécanique.

Nous trouvons dans une lettre à l'auteur du *Journal [des] Savants*, de mars 1675, *touchant le principe de justesse [des] horloges portatives*, une observation qui équivaut à l'inv[ention] de la manivelle à double effet : « Ayant considéré qu'un re[ssort] étant rebandé au même point se débandera toujours en [même] temps, s'il trouve la même liberté de se débander subite[ment], j'ai inféré qu'on en pourrait employer deux, dont l'un jo[uerait] pendant que le premier mobile de l'horloge rebanderait l'a[utre]; car ainsi il n'importera pas s'il le rebande plus ou moins [vite], pourvu qu'il le rebande avant que l'autre achève de se déb[ander].

…nséquent, l'un délivrant l'autre sur la fin de son mou… …e jeu durera toujours uniformément, et en laissant …chaque retour ou période de ces deux ressorts, une dent …aine roue entraînée par le mouvement ordinaire et qui …s secondes, ou autres parties du temps, nous aurons …ge ou montre, telle que nous pourrons désirer. »

…e dirons qu'un mot de la querelle entre Leibniz et les …s au sujet du principe de la conservation de la quantité …ement. Leibniz ne s'entendait pas beaucoup mieux lui… …e Descartes, parce que, comme Descartes, il admettait la …e la force qu'a un corps en mouvement et, de même que …rseur, raisonnait sur cette force, sans la définir mieux

…tes entendait par force d'un corps le produit de son poids …tesse, mais il donnait au même mot le sens de ce que …elons aujourd'hui travail, par exemple dans cet énoncé : *…tant de force pour élever un poids de* 1 *livre à* 4 *pieds … élever un poids de* 4 *livres à* 1 *pied*. Bien entendu, il …t encore le même mot dans un troisième sens, celui de …ns les questions d'équilibre.

…à Leibniz, autant du moins qu'on peut en juger, il en… …ar force d'un corps en mouvement, sa force vive, qui se …e par la hauteur à laquelle le corps pourrait remonter. …r exemple, dans une de ses réponses à l'abbé de Conti : *…ue l'on suppose que toute la force d'un corps de* 4 *livres, …vitesse est de* 1 *degré, doit être donnée à un corps de …elui-ci recevra non pas une vitesse de* 4 *degrés, suivant …pe cartésien, mais de* 2 *degrés seulement, parce qu'ainsi*

les corps ou poids seront en raison réciproque des hauteurs auxquelles ils peuvent monter en vertu des vitesses qu'ils ont, ces hauteurs sont comme les carrés des vitesses.

Les deux énoncés de Descartes et de Leibniz ne sont qu'un galimatias double (je prends le mot dans le sens que lui donne Voltaire). Toutefois, l'idée de Descartes, convenablement éclaircie, est devenue le théorème de la conservation de la somme des quantités de mouvement, en projection sur un axe arbitraire, dans le cas où le système matériel considéré n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, et Leibniz a eu tort de méconnaître cette vérité; mais Descartes faisait un singulier usage de son principe dans la question du choc des corps, et Leibniz a eu raison de combattre les conclusions de notre philosophe.

Quant à l'idée de Leibniz, elle a donné lieu au théorème des forces vives, mais Leibniz faisait un aussi mauvais usage de son principe que Descartes du sien : Ainsi, reprenons son exemple, en le renversant toutefois, pour rendre l'hypothèse physiquement réalisable, car je ne verrais aucun moyen de faire passer la force d'un corps de 4 livres dans un corps de 1 livre, à moins d'en supprimer 3; supposons donc qu'un corps mou, pesant 1 livre, animé d'une vitesse 4, vienne choquer un autre corps mou en repos et pesant 3 livres : l'ensemble, qui sera le second corps de l'énoncé de Leibniz, aura bien toute la force du premier d'après Descartes ; il pèsera 4 livres, mais sa vitesse ne sera que 1, tandis que, d'après Leibniz, elle devrait être 2 : en effet, la vitesse du premier corps étant 4 et celle du second x, les hauteurs auxquelles ils pourraient remonter satisferont à la condition

$$\frac{16}{x^2}=\frac{h}{h'};$$

s hauteurs, d'après Leibniz, devraient être en raison réci-
des poids 1 et 4, x serait donc donné par la proportion

$$\frac{16}{x^2} = \frac{4}{1}, \quad \text{d'où} \quad x = 2.$$

niz trouve 2 parce qu'il suppose mentalement que la force
premier corps a passé entièrement dans le second, mais
ne singulière manière de répondre aux gens que de les
en défaut en changeant leur hypothèse, sans le dire expli-
nt; au reste il convient de remarquer que Descartes avait
d'admettre dans tous les cas des corps mous ou élastiques
de la conservation de la quantité de mouvement, et que
z avait tort de supposer, aussi dans tous les cas, que la
té de force vive restait la même après qu'avant le choc.

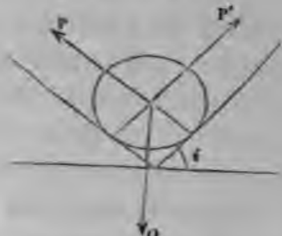
onstratio Geometrica Regulæ apud staticos receptæ DE
IS GRAVIUM IN PLANIS INCLINATIS, *nuper in dubium vocatæ :*
tio casus elegantis in Actis novemb. 1684 *propositi*, DE
DUOBUS PLANIS ANGULUM RECTUM FACIENTIBUS SIMUL INCUM-
quantum unumquodque planorum prematur, determi-
C'est-à-dire, *démonstration de la règle reçue en statique,*
écemment mise en doute, touchant les pressions exercées
s corps pesants sur les plans inclinés, et solution du cas
t proposé dans les Actes de novembre 1684, *relativement*
sphère placée entre deux plans inclinés rectangulaires,
la détermination de la pression exercée sur chacun des
plans.

s ne mentionnons cet article que pour montrer combien

la Mécanique avait encore fait peu de progrès à cette ép
au moins, combien les principes les plus élémentaires
encore peu répandus.

Si l'on désigne par Q le poids de la sphère, par i l'in
de l'un des plans sur l'horizon, par P la pression exer

Fig. 17.



sphère sur ce plan et par P′ la pression exercée sur l'au
les équations du problème sont évidemment

$$P\cos i + P'\sin i = Q$$

et

$$P^2 + P'^2 = Q^2;$$

elles donnent immédiatement

$$P' = Q\sin i,$$

et

$$P = Q\cos i.$$

Cependant les formules auxquelles arrive Leibniz équival

$$P' = \frac{Q}{2}(1 - \cos i + \sin i),$$

et

$$P = \frac{Q}{2}(1 - \sin i + \cos i);$$

mais la fausseté du résultat n'est rien en comparaison de l

du raisonnement qui y conduit : Leibniz commence par
ître, en accordant les plus grandes louanges à l'inventeur
ose, que la pression exercée par un corps pesant sur le
cliné qui le supporte se compose de deux parties, celle qui
la tendance du corps à tomber suivant la ligne de plus
pente du plan, et celle.... mais comme il est difficile de
ce qui manque de sens, je préfère citer le texte latin :
*lobum in plano aliquo inclinato duplex exercere momen-
tum quo decliviter descendere tendit, alterum quo planum
premit, quæ duo simul absolutum, seu totale gravis mo-
n constituunt.*

non-sens admis, Leibniz amalgame les deux pressions
es sur chacun des plans et détermine les rapports du *total*
rties ; mais comme, ces parties restant inconnues, la question
trouverait pas résolue par là, il recourt à cette nouvelle
plus étrange encore que la première, de faire la somme des
otaux égale au poids de la sphère.

t par cette médiation qu'il trouve les formules que nous
transcrites et il constate avec bonheur que, en effet,

$$P + P' = Q.$$

joute bonnement : Cette méthode est très avantageuse,
on est embarrassé. Elle est peu géométrique et, en quelque
métaphysique ; on pourra l'appeler provisionnelle, jusqu'à
elle soit établie par une autre voie plus conforme aux no-
ordinaires de Géométrie et plus rigoureuse, ce que je me
e de faire, aussitôt que j'aurai du loisir.

*thodus autem qua usi sumus, per regulam alternati-
i, etiam in aliis casibus perplexis enodandis magnum usum*

habere potest; quamvis non sit pure Geometrica, sed quidem Metaphysica simul; unde provisionalis censeri potest... *idem demonstretur alia via, magis secundum* vulgarem... *geometrica, et rigorosa, quam ubi vacaverit,* exhibere *reservo.*

Ubi vacaverit revient trop souvent dans les Ouvrages de L... Il lui aurait mieux valu de soigner davantage ses articles... pas se laisser autant absorber par la contemplation des ... cela eût mieux valu aussi pour le progrès des idées ... méthodes.

Règle générale de la composition des mouvements et ... *cation à la construction de deux problèmes.* (*Journal* ... *vants*, 1693.)

Si les différents mouvements qu'il s'agit de composer s... qu'ils amèneraient le mobile, au bout du même temps, de l'... des coordonnées aux points dont les coordonnées seraient re... vement

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ \ldots \ (x_n, y_n, z_n),$$

ce mobile, dans le mouvement résultant, sera, au bout du ... temps, transporté de l'origine au point qui aurait pour ... données

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \quad z_1 + z_2 + \ldots$$

Leibniz connaît cette règle qu'il énonce ensuite, mais il pré... suivante : si AB, AC, AD, AE, etc., représentent les ... mouvements, que G soit le centre de gravité de tous les points ... C, D, E, etc., et que sur la droite AG prolongée on prenne ...

:utant de fois AG qu'il y a de mouvements composants, ament résultant sera AM.

marquera dans cet énoncé une tendance bien nette de le l'auteur à la généralisation des idées. Quant à la dé- tion, elle est au moins bizarre, la voici en abrégé : « Le ne pouvant pas aller en même temps de plusieurs côtés, ra vers le centre de gravité de tous les points de tendance, ira d'autant plus loin qu'il y aura plus de tendances. ***l arrivera au mobile la même chose qui arriverait à son le gravité si ce mobile se partageait également entre les ents composants, pour satisfaire parfaitement à tous e.*** Car, le mobile étant partagé également entre quatre es, il ne peut échoir à chacune qu'une quatrième partie ile, qui devra aller quatre fois plus loin, pour avoir au- rogrès que si le mobile tout entier avait satisfait à chaque e. Etc. »

iz craint que cette démonstration ne paraisse pas très ante et il a sans doute raison.

ncé du premier des deux problèmes qu'il traite à l'aide méthode est à peu près inintelligible : Leibniz suppose tyle tende en même temps un grand nombre de fils et il la tangente à la courbe décrite par la pointe de ce style; mprends pas très bien ce mécanisme; quoi qu'il en soit, solution du problème d'après Leibniz : « Du point A de la soit décrit un cercle quelconque coupant les filets aux B, C, D, etc.; soit trouvé le centre de gravité de ces points, G; la droite AG sera perpendiculaire à la courbe, ou bien oite menée par A normale à AG sera la tangente qu'on e. En voici la raison qui a servi de principe d'invention :

C'est qu'on doit considérer que le style qui tend les
être conçu comme ayant autant de directions égales
entre elles qu'il y a de filets : car il les tire également,
il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée
être dans la perpendiculaire à la courbe) passe par le
gravité d'autant de points qu'il y a de filets, et ces points
de l'égalité des tendances dans notre cas, sont également
du style, et tombent ainsi dans les intersections du
les filets. »

Le *second problème* n'est autre que celui de la
des forces concourantes; Leibniz l'énonce ainsi : *un*
étant poussé en même temps par un nombre infini de
tions, trouver son mouvement. « Cherchez, dit-il, le
gravité du *lieu* de tous les points de tendance de
nions et la direction composée passera par ce centre
vitesses produites seront proportionnelles aux gran
lieux. Les lieux peuvent être des lignes, des surfaces,
des volumes. »

On doit reconnaître là une idée peu utile, sans doute,
tique, mais assurément ingénieuse ; quant au principe
position des forces appliquées à un point matériel, jamais
encore été énoncé dans des termes aussi précis et aussi

De resistentiâ medii et motu projectorum gravium
resistente, ou *De la résistance des milieux et du mouve*
projectiles pesants dans un milieu résistant (*Acta Eru*
1689) et *Addition sur le même sujet* (*Acta Eruditorum*

Leibniz, à l'époque où il écrivait cet article, devait

par ouï-dire, que les questions dont il allait s'occuper déjà traitées dans le premier volume du livre des *Prin- le la Philosophie naturelle*, qui avait paru en 1687; ance, quand même elle serait réelle, non seulement ne être admise en pareil cas, mais serait encore peu conve- Aussi pensé-je que c'est délibérément que Leibniz s'est ns la mêlée où il devait finalement avoir le dessous, au- de son vivant.

article est mauvais à deux points de vue : le premier que, t la mauvaise habitude qu'il avait puisée dans son édu- première, Leibniz se lance tout d'abord dans des considé- s *à priori*, on ne peut plus mal fondées, que Newton, au ire, a toujours soigneusement évitées; le second que, pou- raiter par le calcul les questions qu'il aborde, ce qui eût moyen de se donner l'avantage, il se borne à donner des ts, au risque de se laisser accuser d'avoir pris dans Newton ui étaient exacts.

mmence par distinguer dans la résistance du milieu deux , l'une absolue (*absoluta*) et l'autre relative (*respectiva*), léfinit d'ailleurs fort mal. Il s'efforce ensuite de trouver par ion la loi de la résistance. Il n'y arrive naturellement pas, rs, tombe dans des hypothèses comme celle-ci, par exemple : *nouvement du mobile est par lui-même uniforme* (c'est-à- probablement, si le mobile n'est soumis à aucune autre ue la résistance du milieu) *mais qu'il soit retardé propor- llement à l'espace déjà parcouru, etc.*, hypothèse en vertu uelle la résistance, pour la même vitesse actuelle, pourrait ir infinie, si le mobile était parti avec une vitesse suffisante point suffisamment éloigné.

Après avoir énoncé dans toutes sortes d'hypothèses... démonstrations, une foule de résultats que je n'ai pas... vérifier, Leibniz termine par ces mots assez inconsid... pourrait déduire de là bien des conséquences utiles d... tique, mais il nous suffira d'avoir jeté les bases gé... dans lesquelles consistait la plus grande difficulté (... *fundamenta geometrica jecisse suffecerit, in quib...* *consistebat difficultas*). Au reste tout cela se rattache à l'... lyse des infinis, c'est-à-dire au calcul des sommes et... rences (*omnia autem respondent nostræ analysi in...* *hoc est calculo summarum et differentiarum*). »

Je ne dis pas non, mais il fallait se donner la pe... montrer. Je sais bien qu'on pourrait réclamer en fave... ces opuscules l'indulgence qu'on accorde ordinaire... articles de journaux, mais pourquoi, étant Leibniz... comme le *Mercure galant?* Il y avait, dit-il, à éviter l... *sed vitanda erat prolixitas;* il l'eût bien mieux é... bornant à l'une des hypothèses examinées par New... tant la question en quelques mots par le calcul. Mais... qu'il tient à se jeter dans la gueule du loup; il est... candeur l'empêchait peut-être de croire aux loups.

L'*Addition*, que Leibniz n'a écrite, dit-il, qu'après... recherches de Newton et d'Huyghens sur le même suje... des explications assez embarrassées sur la distinctio... résistance *absolue* et la résistance *relative;* mais Leib... pour le cas d'un mobile pesant retardé proportionne... vitesse, la formule du temps

$$t = \int \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2},$$

ésigne la vitesse maximum, que le mobile n'atteindrait
bout d'un temps infini, comme il le remarque fort bien;
éduit même cette autre formule :

$$t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \frac{1}{7}v^7 + \ldots$$

esse maximum étant prise pour unité. Il aurait donc pu
r une meilleure forme à son premier article.

tamen de natura et remediis resistentiarum in machinis, corporum super-incessu oriuntur. C'est-à-dire : *Essai sur ture des résistances qui naissent, dans les machines, du ct des corps et sur les moyens de les diminuer.* (*Miscellanea inensia.*)

mémoire a peu d'importance, mais il atteste les tendances
uteur à faire servir les Sciences aux choses pratiques et

ibniz fait dériver le frottement des aspérités que présentent
rfaces des corps, aspérités qui engrènent les unes dans
rvalle des autres, comme les dents de deux roues. Le glisse-
de deux corps l'un sur l'autre exige l'écrasement de ces
ités, ou bien que l'un des deux corps saute par-dessus elles.
loue Amontons d'avoir renversé l'erreur commune où l'on
avant lui, que le frottement dépendait de l'étendue de la sur-
le contact; mais il formule quelques objections, peu recom-
dables d'ailleurs, contre la proposition établie par ce savant
e frottement est proportionnel à la pression.

Il définit bien le mouvement de glissement, celui de rou
et le mouvement mixte.

Les principaux moyens de diminuer le frottement so
duire les surfaces frottantes de matières grasses; mais sur
substituer le roulement au glissement.

*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tang
quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur,
gulare pro illis calculi genus.* C'est-à-dire : *Nouvelle
pour les maximums, les minimums et les tangentes, qu
tent ni les fractions ni les irrationnelles, et singulier g
calcul pour cela.*

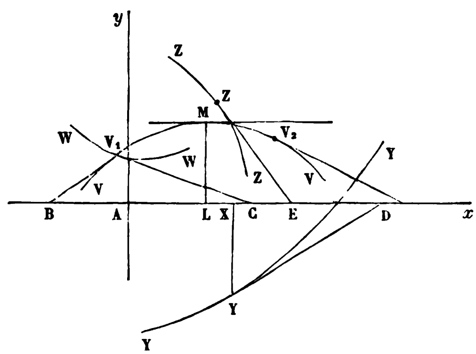
Ce mémoire a une si grande importance et il est si co
nous en donnerons une traduction presque complète.

Le texte publié dans les *Acta Eruditorum* et reprod
l'édition par Dutens des œuvres de Leibniz, donnée à
en 1768, contient, dès les premières lignes, deux erreu
plicables, qu'il est impossible, en tout cas, d'attribuer à L
et dont nous ne tiendrons pas compte dans notre trad
les lettres sont tellement placées dans la première figur
texte fait dire à Leibniz que la différentielle de l'ordonn
celle de l'abscisse comme l'ordonnée est à la tangente
sous-tangente). Ceci ne serait rien; mais, aussitôt ap
trouve ce singulier énoncé, que, si deux courbes, rapporté
mêmes axes, se coupent, les différentielles de leurs ordonné
respondant à un même accroissement de l'abscisse, à p

'intersection, sont égales. Je ne vois pas comment le manu- l'auteur a pu donner lieu à une pareille coquille; mais il r que, si Leibniz a corrigé son épreuve, l'enthousiasme aralysé sa clairvoyance.

ient (*fig.* 18) un axe AX et diverses courbes VV, WW,

Fig. 18.



ZZ, dont les ordonnées normales à l'axe, VX, WX, YX, eront désignées respectivement par v, w, y, z, la partie re- hée de l'axe (*abscissa ab axe*), AX, étant représentée par x. » ısage de figurer l'axe des y n'avait pas encore été adopté, nous rétablissons cet axe.

Soient VB, WC, YD, ZE des tangentes à ces courbes, cou- l'axe aux points B, C, D, E; soient d'ailleurs dx une lon- r prise à volonté et dv, dw, dy, dz d'autres longueurs qui ıt à dx comme VX, WX, YX, ZX sont à XB, XC, XD, XE; posé, les règles du calcul seront les suivantes :

Soit une constante a, da sera nul et $d(ax)$ sera égal à adx.

« *Addition et soustraction :* Si

$$v = z - y + w + x$$

on aura

$$dv = dz - dy + dw + dx.$$

« *Multiplication :* Si

$$y = xv,$$

on aura

$$dy = d(xv) = x\,dv + v\,dx.$$

« *Division :* Si

$$z = \frac{v}{y},$$

on aura

$$dz = \frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{y^2},$$

« A l'égard de ces signes, il faut bien remarquer que, le calcul, au lieu d'une lettre, on introduit sa différentielle conserver les signes, c'est-à-dire à la place de $+ z$, écrire et, à celle de $- z$, écrire $- dz$, comme il appert de la règ l'addition et la soustraction.

« Mais quand on en vient à l'exégèse des valeurs, par e si l'on considère la relation de z à x, alors il faut voir si positif ou négatif. Ainsi (d'après la figure), comme la tang un point quelconque de ZZ n'est pas dirigée vers A, mais opposé, c'est-à-dire au delà de X, de sorte que les z décr quand les x croissent, dz sera négatif. Mais sur la courbe ordonnées tantôt croissent et tantôt décroissent, dv sera tantôt positif, tantôt négatif; le premier cas se présente en second en V_2. »

ıiz ne donne pas encore des signes contraires aux ordon- points situés de part et d'autre de l'axe des x. Dès lors, aurait pu lui venir d'inclure le signe de l'accoissement notation d'une différentielle. C'est pourquoi il écrit si ·ièrement, au point de vue où nous sommes aujourd'hui

$$d\,\frac{v}{y} = \frac{\pm\, v\,dy \mp y\,dv}{y^2}.$$

.ais dv n'est ni positif ni négatif au point M, où les v ne :nt ni ne décroissent, mais restent sans variation (*in statu* de sorte que $dv = 0$, car $+ 0 = - 0$, et en ce point l'ordon- M est maximum (elle serait minimum si la courbe tournait vexité à l'axe); et la tangente à la courbe en M n'est tournée côté de A, ni de l'autre côté : elle est parallèle à l'axe.

i dv était infini par rapport à dx, la tangente serait perpen- ıire à l'axe, ou bien ce serait l'ordonnée elle-même. Si dv et aient égaux, la tangente ferait avec l'axe un angle d'un demi-

i, l'ordonnée v croissant, son accroissement ou sa différen- dv, croît aussi, c'est-à-dire si, dv étant déjà positif, sa dif- :ielle ddv est aussi positive, la courbe tourne sa concavité e. Il en serait de même si la différentielle et la différentielle différentielle étaient toutes deux négatives. Autrement la e serait convexe vers l'axe. »

cidément Leibniz corrigeait bien mal ses épreuves.

Mais là où l'accroissement est maximum ou minimum, à-dire là où les accroissements, de croissants qu'ils étaient, nnent décroissants, ou l'inverse, là se trouve un point de n contraire, où la concavité et la convexité se permutent.

pourvu qu'en ce point les ordonnées, de croissantes ou... santes qu'elles étaient, ne deviennent pas décroissantes... santes. »

C'est-à-dire, je pense, pourvu que le point considéré... trouve pas justement sur l'axe.

« Car alors la concavité ou la convexité resterait to... l'axe. »

Ce qui fait que Leibniz s'embrouille un peu dans ses ré... qu'il y verrait très clair sur des exemples, c'est d'abord... donne pas des signes contraires aux ordonnées de... placés de côtés opposés par rapport à l'axe (des x); en se... que, d'après sa manière de voir, si un arc de courbe se... parallèlement à notre axe des y, de manière à passer d'u... l'autre de l'axe (des x), sa concavité changerait de sens... qu'il la prend par rapport à cet axe; enfin que, dans les p... même abscisse, pris sur les deux arcs comparés, les... (comptées toutes positivement) auraient leurs différen... signes contraires.

La règle des signes de position, loin d'être bien... n'avait même pas encore été nettement formulée. L'a... d'Albert Girard, *le moins recule où le plus avance*, n'... encore fait fortune, comme cela se voit dans Huyghens... et même quelquefois dans Newton.

C'est pourquoi nous passons une discussion de signes p... reuse; mais nous retenons cette phrase : « De là vient q... blème du point d'inflexion n'a pas deux racines égales... celui du point maximum, mais trois. »

« *Puissances :*

$$dX^a = aX^{a-1}dX.$$

:

$$dX^3 = 3X^2 dX.$$

ème

$$d\frac{1}{X^a} = -a\frac{dX}{X^{a+1}}.$$

e : si

$$W = \frac{1}{X^3},$$

$$dW = -3\frac{dX}{X^4}.$$

cines :

$$d\sqrt[b]{X^a} = \frac{a}{b}\, dX \sqrt[b]{X^{a-b}},$$

$$d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

1 reste la règle relative aux puissances entières aurait suffi s fractions et les radicaux, car une puissance devient une n lorsque l'exposant est négatif, et se change en un radical e l'exposant devient fractionnaire. Mais j'ai mieux aimé e moi-même ces conséquences, que de les laisser à trouver tres; parce qu'il importe, en une chose embarrassante par ème, de se prêter à la faciliter. »

e parfaite honnêteté, que Leibniz porte partout, rend la de ses œuvres particulièrement attrayante. Simple et grand, enthousiaste, on pourrait le peindre en deux mots : *humai-t divin.*

onnaissant l'*algorithme* de ce calcul, que j'appelle *diffé-l*, toutes les équations différentielles peuvent être trouvées s mêmes opérations, par suite les maximums et les mini-

nums, ainsi que les tangentes ; sans qu'il soit utile de faire disparaître les fractions (dénominateurs), les radicaux, ou liens (*vincula*), ce qui était indispensable d'après les méthodes publiées jusqu'ici.

« La démonstration de toutes ces choses sera facile à une personne versée dans les Mathématiques, si elle considère ceci : que les accroissements dx, dy, dv, dw, ... peuvent être regardés comme proportionnels. »*

Ce dernier membre de phrase est très remarquable.

« Ainsi une équation quelconque étant donnée, on peut écrire l'équation différentielle, en substituant simplement à chaque membre, et, pour cela, à chaque terme, sa différentielle obtenue d'après l'algorithme précédent.

« Les méthodes proposées précédemment ne reposaient pas sur un pareil moyen, car elles emploient une droite qui n'est pas dy, c'est-à-dire la quatrième proportionnelle à la sous-tangente, à l'ordonnée et à dx, ce qui trouble tout. (Il est impossible de traduire littéralement ce passage, car il contient trop de fautes d'impression).

« Aussi prescrivaient-elles d'enlever d'abord les fractions et les irrationnelles, tandis qu'il est clair que notre méthode s'applique même aux lignes transcendantes, c'est-à-dire qui ne peuvent être ramenées au calcul algébrique, ou qui ne sont d'aucun degré, et cela par un moyen universel, sans hypothèses particulières, qui ne se présentent pas toujours, simplement parce que la recherche des tangentes se réduit à celle de droites qui joignent deux points infiniment voisins de la courbe, ou se confondent avec les côtés d'un polygone d'un nombre infini de côtés, qui, pour nous, équivaut à la courbe.

reste, la distance infiniment petite de ces points peut tou-
e exprimée par une différentielle connue, ou au moyen
ation qui la contienne, par l'intermédiaire d'une tangente

particulier, si y était une quantité transcendante, par
l'ordonnée d'une cycloïde, que y entrât dans un calcul
fournir l'ordonnée z d'une autre courbe, et qu'on voulût
z, pour trouver la tangente à la seconde courbe, dz dé-
t de dy, et dy serait connu puisqu'on connaît la tangente
loïde.

cette même tangente à la cycloïde, si on ne la connaissait
ait de même déterminée par le calcul, au moyen des pro-
de la tangente au cercle.

ais il convient de donner un exemple :

it l'équation *primitive*, ou donnée :

$$\frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} = 0,$$

ant la relation entre x et y, ou entre AX et XY (l'abscisse
donnée d'une courbe), a, b, c, e, f, g, h, l, m étant des
tés données; il s'agit de mener par un point Y, donné sur
be, une droite YD (*fig.* 18) qui la touche en ce point, ou
iver la raison de DX à XY. Posons pour abréger

$$a+bx=n,$$
$$c-x^2=p,$$
$$ex+fx^2=q,$$
$$g^2+y^2=r,$$
$$h^2+lx+mx^2=s;$$

il viendra

$$\frac{x}{y}+\frac{np}{q^2}+axr+\frac{y^2}{\sqrt{s}}=0,$$

ce qui sera l'équation *seconde.*

« Mais, par notre calcul,

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\pm x\,dy \mp y\,dx}{y^2},$$

$$d\left(\frac{np}{q^2}\right)=\frac{\pm np\,.\,2q\,dq \mp q^2(p\,dn+n\,dp)}{q^4},$$

$$d(ax\sqrt{r})=a\,dx\sqrt{r}+\frac{ax\,dr}{2\sqrt{r}},$$

et

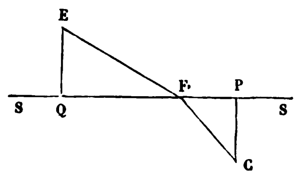
$$d\left(\frac{y^2}{\sqrt{s}}\right)=\frac{\pm y^2\,\dfrac{ds}{2\sqrt{s}} \mp 2y\,dy\sqrt{s}}{s}.$$

En substituant, on aura la *troisième* équation; enfin ... çant dn, dp, dq, dr et ds par leurs valeurs, on aura ... équation, *où les seules différentielles qui resteront ... et dy, seront toujours en dehors des dénominateurs* (... natores) *et des autres liens* (vincula), *et chaque memb... sera affecté* (multiplié) *soit par dx, soit par dy, la ... gènes subsistant pour ces deux quantités; et cela que... pliqué que soit l'exemple, de sorte qu'on pourra toujour... le rapport de dx à dy, ou, ce qui est la même chose, ce... à XY. Or l'exemple que nous avons choisi est assez ... pour que la manière de se servir des règles établies ... apparaisse même dans un cas encore plus difficile.*

« Maintenant il importe de montrer l'usage (de la ...

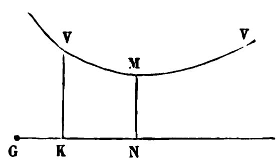
—xemples plus difficiles à entendre (*in exemplis intellectui* ɔviis). Soient donnés deux points C et E (*fig.* 19) et une ɔ, dans un même plan, on demande de trouver sur SS un

Fig. 19.



' tel que la somme des produits de EF et de CF par des données h et r soit minimum. (Leibniz explique le rapport question à la théorie de la lumière, mais nous passons ces connus.) Représentons la somme de ces rectangles h.EF et

Fig. 20.



par l'ordonnée KV, que nous désignerons par ω, d'une VV, rapportée à un axe GK (*fig.* 20); il s'agit de trouver .imum NM de cette ordonnée. Soient $CP = c$, $EQ = e$, p, $QF = GN = x$, $CF = f$ et $EF = g$, FP sera égal à $p - x$; à f et à g, ils seront représentés par

$$\sqrt{e^2 + (p-x)^2} = \sqrt{l} \quad \text{et} \quad \sqrt{e^2 + x^2} = \sqrt{m}.$$

Nous aurons donc

$$\omega = h\sqrt{l} + r\sqrt{m},$$

dont l'équation différentielle sera, en faisant $d\omega = 0$, p[our la condition]
du minimum,

$$0 = h\,\frac{dl}{2\sqrt{l}} + r\,\frac{dm}{2\sqrt{m}},$$

ou, en remplaçant dl et dm par leurs valeurs,

$$0 = -h\,\frac{(p-x)\,dx}{\sqrt{l}} + r\,\frac{x\,dx}{\sqrt{m}},$$

ou

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g};$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{r} = \frac{fx}{g(p-x)} = \frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{EF}} : \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FC}}.$$

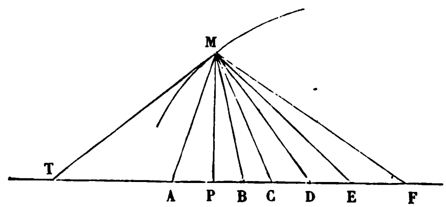
« Ainsi, ce qui a paru difficile à des hommes très sa[vants]
enlevé en trois lignes par un homme instruit dans no[s]

« Je prendrai encore un autre exemple : imaginons la c[ourbe]
des points M (*fig.* 21) tels que la somme de leurs dista[nces]
MB, MC, MD, ME, MF à six points A, B, C, D, E, F
sur un axe, soit égale à une quantité donnée g : on de[mande la]
tangente en M à cette courbe. Soient MP l'ordonnée du [point M]
et T le pied de la tangente cherchée sur l'axe, on aura

$$\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{MP}} = \frac{\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MA}} + \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MB}} + \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MC}} + \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MD}} + \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{ME}} + \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MF}}}{-\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{MA}} + \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{MB}} + \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MC}} + \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{MD}} + \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ME}} + \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{MF}}}$$

:le restera la même, quel que soit le nombre des points
. ‹ur l'axe.

Fig. 21.



problème, si l'on voulait le traiter par les anciennes mé-
serait inabordable.

joindrai encore ici la solution du problème proposé par
ıne à Descartes, que celui-ci essaya, mais ne put résoudre :
. la courbe dont la sous-tangente serait une constante *a*.
ɪ l'ordonnée de cette courbe,

$$\frac{w}{a}=\frac{dw}{dx};$$

:, puisque dx peut être pris arbitrairement, on le suppose
ıt et égal à b, il viendra

$$w=\frac{a}{b}\,dw;$$

onnées de la courbe cherchée sont donc proportionnelles à
ıcréments ou à leurs différentielles, ou bien : si les abscisses
nt en progression arithmétique, les ordonnées croissent
ɪgression géométrique; ou encore si les ordonnées sont les
·es, les abscisses en seront les logarithmes. La courbe est
ıne logarithmique. »

Meditatio nova de naturâ anguli contactus et oscu-que usu in practicâ mathesi, ad figuras faciliores ex difficilioribus substituendas. C'est-à-dire : *Méditation sur la nature des angles de contact et d'osculation l'usage de ces considérations en vue de substituer à de plus compliquées d'autres courbes plus simples qui p suppléer.* (Acta Eruditorum, 1686.)

Et

Generalia de natura linearum, anguloque cont osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum nonnullis. C'est-à-dire : *Généralités sur la nature des les angles de contact et d'osculation ; les générations p ment et autres modes, et sur les usages de ces cho* Eruditorum, 1692.)

Le premier de ces articles contient la théorie com osculations de tous les ordres, théorie dont Leibniz m lité pratique pour substituer à une courbe compliquée u plus simple, qui lui soit osculatrice au degré voulu, d nature de la question proposée, et produise les mêmes

Malheureusement on y trouve les lapsus les plus gra

Le second est une réponse à des objections prése Jacques Bernoulli, relativement au premier.

Voici la traduction abrégée de la Méditation :

« On peut, dans une partie infiniment petite d'une lig sidérer non seulement la direction, comme cela a été fait mais le changement de direction, ou la courbure (*flexu* de même que les géomètres, pour assigner la direction ligne en un point, se sont servis de la plus simple des

ayant la
droite qu
de la lig
ayant en
même co
lateur, c
droite e
par cela
sera la l
a partou
« J'a
celui qu
autres c
où elle es
plus que
tellemen
elle. J'a
minimu
droite a
« Qua
de savoir
des équat
ont deux
flexion s
points co
conques
conditio
deux co
Outre
M. Mar

ı même direction en ce point, c'est-à-dire de la ligne ai y était tangente ; de même, je mesurerai la courbure gne au même point, à l'aide de la ligne la plus simple ı ce point non seulement la même tangente mais aussi la ourbure que la ligne proposée, c'est-à-dire son cercle oscu- omme je vais bientôt l'expliquer. Car de même que la st la ligne la plus propre à déterminer une direction, qu'elle a partout la même direction ; de même le cercle igne la plus apte à déterminer une courbure parce qu'il ıt la même courbure.

ppelle cercle osculateur à une courbe en un de ses points ıi fait avec elle un angle de contact plus petit que tous les ercles qui touchent la courbe au même point, du côté st concave ; il y en a un, en effet, qui peut lui être assimilé ıe tous les autres, qui la suit le plus loin, et l'approche nt qu'aucun autre cercle ne pourrait passer entre lui et appelle angle d'osculation (*angulum osculi*) cet angle ım de contact ; de même que l'angle minimum d'une ıvec une courbe s'appelle angle de contact.

ıant à la manière d'obtenir ce cercle osculateur, il suffira ir que, de même que les lignes tangentes sont fournies par ations ayant deux solutions égales, de sorte que ces courbes ıx points d'intersection confondus, et que les points d'in- sont ceux où la tangente rencontre la courbe en trois confondus ; de même les cercles ou autres courbes quel- s osculatrices à une courbe donnée se trouveront par la ıon que les équations aient quatre solutions égales, ou ontacts réunis en un seul. »

re l'erreur qu'elle contient, cette phrase était presque

inintelligible; c'est pourquoi je la reproduirai textuel

« *Ut autem habeatur et modus inveniendi circu lantem, sciendum est, quemadmodum tangentes inveni æquationes, quæ habent duas radices æquales, seu duos co coincidentes, et flexus contrarii per tres radices æqu circuli vel aliæ quævis lineæ datam osculantes inveni quatuor radices æquales, seu per duos contactus in un cidentes.* »

Il est évident que Leibniz trouve le nombre quatre imagination ; il compte par points de contact d'abord ensuite confondus, au lieu de compter par points d'in venant à se réunir. Mais ce lapsus, considéré avec in n'enlève rien au mérite de la théorie.

Je vais plus loin : les erreurs analogues, qu'on re chaque instant dans les Ouvrages de Leibniz, prouvent foi, la candeur avec laquelle il dit ce qu'il croit, au m il le croit, sans défiance de la critique, sans craindre le interprétations. Il se trompe, mais ne cherche jamais Son terrible adversaire Newton ne se serait pas déco cette simplicité. Aussi a-t-il pu faire payer bien cher ses négligences. Mais la Mathématique n'étant que échelon du savoir et la Morale le dernier, il vaut en se tromper de dix points en Mathématiques que d'un

Cependant, comme Leibniz va encore se méprendre essayer de prévenir les juges en sa faveur. Il est év n'a pas fait les calculs qu'il aurait dû faire pour v assertion; mais ce qui va suivre rendra aussi évident avait au moins fait un, relatif à un cas particulier ch vrai, assez mal pour l'induire forcément en erreur.

cul du rayon de courbure d'une des courbes usuelles, en onque de ses points, l'ennuyant sans doute, il aura sup- ourbe rapportée à son axe, pris pour axe des x, et il aura le rayon de courbure de cette courbe en son sommet, en l'ordonnée pour variable indépendante. Or cette ordonnée t que par son carré aussi bien dans l'équation de la que dans celle du cercle, Leibniz ne pouvait naturelle- ouver que deux ou quatre racines égales dans l'équation onnées de rencontre : deux pour le cas de tangence et our le cas d'osculation.

pourquoi il ajoute : « *Quod si tres contactus coincidant, tuor, aut plures (radicibus sex, aut octo, aut pluribus tibus æqualibus) oriuntur osculationes secundi, tertiive , aut adhuc altiores, in tantum perfectiores osculo primi , in quantum prima osculatio perfectiorem contactum t, quam contactus communis.* » C'est-à-dire : Si trois con- ncident, ou quatre, ou davantage (les équations des deux ayant six ou huit ou un plus grand nombre de solutions . il en résulte des osculations du second degré, ou du ne, ou d'un ordre plus élevé, lesquelles l'emportent d'au- acune en perfection (sur la précédente) que l'osculation nier degré l'emporte sur le contact simple.

conséquence un cercle peut toucher une droite mais non osculateur, et, si un cercle est osculateur à un autre, ils nt pas différents.

reste un cercle pourra être osculateur à une courbe quel- . Quant à savoir à quel degré pourra s'élever l'osculation x courbes, il faudra voir en combien de points elles peu- couper. »

Encore une inexactitude.

« Ces considérations ont une grande utilité dans la
car, si une ligne jouit d'une propriété remarquable,
soit difficile de l'obtenir au tour ou autrement, on pou
tuer à l'un de ses arcs (dans un intervalle sinon grand,
suffisant pour la pratique) un arc, presque coïncid
autre courbe plus facile à décrire, soit tangente, soit
à la première, et principalement, s'il y a lieu, une cir
de cercle, qui est la ligne la plus facile à décrire.

« C'est ce qui explique pourquoi le cercle, en catop
bien qu'en dioptrique, est le succédané de la parabole,
bole ou de l'ellipse, et a en quelque sorte ses foyers
tation. Car un cercle dont le diamètre est égal au
d'une section conique, dont le centre est sur l'axe, dans
de la courbe, et qui passe par le sommet, est os
conique en ce sommet : c'est pourquoi un arc ass
cercle ne diffère pas de l'arc de la courbe.

« On voit par là pourquoi le foyer d'un miroir
quart du diamètre, cela tient à ce que le foyer de
distant du sommet du quart du paramètre et que
parabole et de son cercle osculateur coïncident.

Il est évident que c'est la considération de ce
induit Leibniz en erreur au sujet du nombre des
muns à une courbe et à son cercle osculateur, rasse
de contact.

Les équations de la parabole et du cercle qui
en son sommet sont

$$y^2 = 2px$$

$$y^2 + (x - p)^2 = p^2.$$

ıine x entre les deux, ce qu'a dû faire Leibniz, parce us facile, il vient

$$y^2 + \left(\frac{y^2}{2p} - p\right)^2 = p^2,$$

$$\frac{y^4}{4p^2} = 0.$$

:me, comme il le dit, a bien quatre racines égales.
qui a principalement exposé Leibniz à se tromper, définition du cercle osculateur était mal choisie. De appelait tangente à une courbe en un de ses points la ait le plus petit angle possible avec cette courbe, de endait par cercle osculateur celui qui fait aussi le plus possible avec la courbe. Je ne dis pas que l'idée soit :st seulement intraduisible, parce qu'elle est trop au- ais Leibniz avait trop osé en métaphysique, pour être en mathématique.

rs que nous avons relevées dans l'article précédent alées par Jacques Bernoulli dans le numéro de des *Acta Eruditorum;* mais Leibniz, sans doute, ne les objections que lui faisait son disciple et il main- ıion dans la réponse à Jacques, dont nous avons titre plus haut.
ıment il raisonne : les normales à une courbe en deux ns A et B se coupent en C et si du point C on décrit

deux cercles avec CA et CB pour rayons, ces deux cer chacun avec la courbe deux points communs, réunis les et les autres en B. Si donc le point B vient se confon point A, le cercle décrit de la position limite du point centre, avec sa distance au point A comme rayon, to courbe en quatre points confondus.

Leibniz admet encore moins l'idée de Bernoul cercle osculateur traverse la courbe au point où il la dit que ce cercle ne coupera pas la courbe, mais la moins que le point de contact ne soit un point d (*flexus contrarii*).

Il ajoute : « Régulièrement le nombre des points co un cercle et à une autre courbe est pair. C'est pourq vois pas comment l'osculation du premier ordre po constituée par trois intersections ; ou, du moins je ne qu'un tel contact soit régulier, c'est-à-dire puisse se pr tous les points d'une courbe, ni que la réunion de qua d'intersection constitue un contact singulier, qui ne avoir lieu qu'en quelques points déterminés d'une courbe

La fin de l'article a trait à d'autres questions.

De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac in ea re Analysis infinitorum usu. C'est-à-dire : *De la formée des rencontres successives d'une infinité de lignes régulièrement et les touchant toutes, ainsi que d'un usage, dans cette recherche, de l'Analyse des infinis.* Eruditorum, 1692.)

;it comme on voit de l'enveloppe d'une courbe mobile.
est, dit Leibniz, la courbe qui en engendre une autre
ution et dont l'invention est due à Huyghens; telles sont
; courbes imaginées par Tschirnhausen, et qui sont
les foyers linéaires.

pelle ici ordonnées, des courbes quelconques définies
t de telle manière, que chacune d'elles est déterminée
n en connaît un point. Deux quelconques d'entre elles,
nt peu distantes, se coupent en un point qu'on peut assi-
la suite de ces points forme une ligne qui a cela de
able qu'elle est tangente à toutes les courbes ordonnées,
on le reconnaîtra aisément, mais ce n'est pas le lieu de
ıtrer.

squ'on recherche la tangente à une courbe, il faut diffé-
on équation, et alors les paramètres sont supposés inva-
unicæ) ou *indifférentiables*, tandis que l'abscisse aussi
l'ordonnée est variable (*gemina*) ou *différentiable.*

contraire, dans la question présente où l'on ne recherche
ngente à l'une des courbes, en un de ses points, mais la
ui est leur tangente commune, ce seront les coordonnées
ui seront indifférentiables, tandis que le paramètre dont
ı chaque courbe sera différentiable, parce que c'est en
ju'il fait varier la courbe.

t cela serait expliqué plus clairement et justifié sur des
; s'il s'agissait d'une exposition de notre *Analyse des*
nais ce n'en est point ici le lieu et je n'en ai pas le

x qui ont compris mes premiers articles parviendront
t à comprendre ce que je viens de dire, s'ils veulent y

réfléchir; et ils y auront d'autant plus de plaisir qu'ils s'en croire en partie inventeurs. »

Nova calculi differentialis applicatio et usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione, c'est-à-dire : *Nouvelle application du calcul différentiel à la construction des courbes, d'après une propriété de leurs tangentes* (Acta Eruditorum, 1694.)

Cet article fait suite au précédent : Leibniz y revient pour compléter, sur la théorie qu'il a déjà exposée, et il en fait des applications.

« J'enseignerai, dit-il, à réduire sous les lois de la Géométrie commune le problème suivant : Étant données des lignes dont la position varie suivant une certaine loi, trouver celle à laquelle elles sont toutes tangentes; ou bien trouver la ligne qui touche une infinité de lignes données, dont la position varie suivant une loi régulière.

« Descartes soumit au calcul les lieux des anciens en donnant des équations qui convinssent à tous leurs points; mais les nôtres seront infiniment plus amples car elles embrasseront tous les points de toutes les courbes contenues dans une même série donnée. Elles contiendront les coordonnées x et y d'un point quelconque de l'une des courbes de la série, mais ces coordonnées seront principalement celles de la courbe qu'elles forment par leurs rencontres successives; elles contiendront aussi les coefficients a, b, c, ..., constants pour chaque courbe, les uns inhérents à elle, comme des paramètres, et les autres extérieurs, qui serviront à définir la position de la courbe.

:on compare entre elles les courbes d'une même série, ou ɔnsidère le passage d'une des courbes à l'autre (*transitum a in curvam*), quelques coefficients seront absolument :s (*constantissimæ*) ou permanents, ce seront ceux qui t les mêmes dans toutes les courbes de la série, et d'autres rariables. Mais comme, pour que la série soit définie (*ut urvarum lex data sit*), il est nécessaire que la variabilité iiste que dans un seul cofficient; ils devront, s'il y en a rs, être liés par des conditions accessoires, au moyen les on pourrait les enlever tous, excepté un, de l'équation ntant toutes les courbes de la série.

ı reste il est manifeste que deux courbes voisines se coun un point unique, et qu'on pourrait assigner, de la cherchée, de sorte que les coordonnées de ce point soient il en résulte que, si l'on considérait x et y comme représ t les coordonnées d'un point d'une courbe de la série, elles ıt variables, mais que, si les mêmes quantités représentent ɔrdonnées du point où la courbe en question touche la ɜ cherchée, elles deviendront invariables. C'est pourquoi, .e passage d'une courbe de la série à sa voisine, ces coor.es x et y seront indifférentiables, tandis que les coefficients, u'ils changent d'une courbe à sa voisine, dans la série, t différentiables.

:ela posé, le calcul sera institué de la manière suivante : 'on prenne un angle droit fixe, dont les côtés indéfiniment ıgés constitueront deux axes de relation pour les courbes, en un axe et son conjugué [1]; on aura une équation (1)

[1] :'est la première fois, je crois, qu'on voit apparaître deux axes de nnées. Ce dernier mot du reste a été créé par Leibniz.

entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de l'[illegible] conque des courbes considérées. Si cette équation conti[illegible] sieurs coefficients arbitraires, b, c, ..., on aura des équ[illegible] au moyen desquelles on pourra enlever ces coefficients d[illegible] tion (1), sauf l'un d'eux, b par exemple, ce qui donn[illegible] équation (3). En différentiant cette dernière, comme l'é[illegible] produite ne contiendra d'autre différentielle que celle de [illegible] différentielle s'évanouira et il restera une équation ordi[illegible] au moyen de laquelle on enlèvera b de l'équation (3) et l'[illegible] une équation (5) où il ne restera que x et y et les pa[illegible] invariables, tels que a; ce sera l'équation de la courbe c[illegible] tangente à toutes les courbes de la série et formée de leu[illegible] sections successives.

« Mais le calcul peut être institué d'une autre manière[illegible] férentiant en même temps l'équation (1) et les équations [illegible] rapport aux coefficients variables; on introduira ainsi p[illegible] différentielles, mais on aura les équations nécessaires pour [illegible] disparaître toutes excepté une, qui s'évanouira d'elle-mê[illegible] suite on fera disparaître les coefficients variables.

« On peut résoudre ainsi d'innombrables problèmes d[illegible] métrie sublime concernant la question inverse des tang[illegible] qu'on ne pouvait pas aborder jusqu'ici. J'en indiquerai qu[illegible] uns :

« Par exemple, si l'on donne une relation entre les seg[illegible] interceptés sur les axes, à partir de l'origine, par une ta[illegible] quelconque à une courbe, on peut trouver cette courbe; c[illegible] touche constamment une droite dont l'équation ne contient [illegible] coefficient arbitraire.

« De même si l'on donne une relation entre les segments [illegible]

ır les axes par une normale à une courbe, on peut trouver ;urbe. Car la normale enveloppe une courbe dont celle ı cherche est la développante.

;st remarquable que dans ce cas la courbe cherchée n'est que; il en existe en effet une infinité qui satisfont à la n et elles sont parallèles entre elles, mais alors on peut se un point par lequel la courbe cherchée doive passer. »

curieux d'observer que, même dans un article aussi beau, ur la forme que pour le fond, et où Leibniz possède pour- bien son sujet, il ne peut éviter une singulière inadver- il propose aussi de trouver l'enveloppe d'une droite pas- ır un point fixe, d'une part, et successivement par tous les d'une courbe donnée!

; il n'y a que les gens qui ne font rien qui ne se trompent 'ailleurs, si Leibniz s'était mis à s'éplucher, il aurait perdu a bonhomie.

.ais nous donnerons un exemple du calcul, relativement à oblème assez général : *Étant donnée la relation entre la ıle à une courbe, terminée à l'axe* (*des* x), *et la distance rigine à l'extrémité de cette normale, sur l'axe, trouver ırbe.* Les courbes enveloppées seront des cercles décrits des des normales sur l'axe et ayant pour rayons les longueurs ; normales. Soient c une normale, b la distance de l'origine ed de cette normale sur l'axe, et $ab = c^2$ la relation donnée c et b; l'équation du cercle variable sera

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + c^2,$$

n remplaçant c^2 par ab,

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + ab;$$

en différentiant cette équation par rapport à b et enlev[...]teur commun, il vient

$$b = x + a,$$

de sorte que l'équation de la courbe cherchée est

$$x^2 + y^2 + (x + a)^2 = 2(x + a)x + ab.$$

« Si l'on donnait la relation entre la longueur de la [...] terminée à l'axe, et le segment qu'elle intercepte sur [...] qu'on demandât la courbe, ce qui reviendrait à chercher [...] normale à une série de cercles, on pourrait employer la [...] que nous avons expliquée pour cela dans ces *Acta*. Mais [...] nous venons d'exposer présentera les plus grands avanta[ges ...] une foule de problèmes de Géométrie supérieure, de M[...] ou de Physique appliquée. »

Il est certain que c'est une méthode d'intégration [...] équations différentielles du premier ordre et les métho[des ...] genre ont souvent l'avantage sur celles qui reposent exclu[sivement] sur des transformations difficiles à découvrir. Au reste [...] bien remarquer que la plupart des équations différentiel[les ...] a pu traiter ont d'abord été intégrées à l'aide de consid[érations] géométriques et ce n'a été, le plus souvent, qu'après leur [...]tion, qu'on a aperçu les transformations utiles pour y arr[iver ...] des considérations abstraites. Or il sera sans doute permis d[e ...] à ce propos qu'en dirigeant trop exclusivement les jeun[es ...] vers la recherche de ces transformations on atrophie peut-[être chez] eux les facultés d'invention.

Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analy[...]

et le nouveau calcul des transcendantes. (*Journal des* pour 1694).

solution qu'a donnée M. le marquis de l'Hospital, dans *oires de l'Académie des Sciences*, d'un problème proposé Jean Bernoulli, et tout ce qu'on a eu la bonté d'y dire ır de mon calcul m'engage à en dire un mot, pour les géomètres à le perfectionner... MM. Bernoulli ont premiers qui ont témoigné publiquement, avec un très uccès, combien ils l'avaient trouvé propre pour résoudre ›lèmes physicomathématiques, dont la porte paraissait auparavant. M. le marquis de l'Hospital y a pris .ssi, en ayant donné de beaux échantillons; et enfin ghens lui-même en a reconnu et approuvé la conséquence. ·endre cette justice à M. Newton (à qui la Géométrie, .e et l'Astronomie ont de grandes obligations) qu'encore il a eu quelque chose de semblable de son chef, suivant ı en a su depuis. Il est vrai qu'il se sert d'autres caractères; mme la caractéristique même est, pour ainsi dire, une ›art de l'art d'inventer, je crois que les nôtres donnent uverture.

.r ce qui est de ceux qui ne se servent que de l'analyse ɜ et pensent peut-être qu'elle leur suffit, il sera bon de poser des problèmes semblables au dernier de M. Ber-

voici un plus général, qui le comprend avec une infinité : Étant donnée la raison, comme m à n, de deux *fonctions* urbe, trouver cette courbe. J'appelle fonction toute partie oite partant d'un point de la courbe, et terminée ailleurs.

Telles sont l'abscisse et l'ordonnée du point; les por[illegible] tangente ou de la normale terminée à l'un des axes, la [illegible] gente ou la sous-normale, etc.

« Le problème se peut toujours résoudre; et il y a [illegible] construire la courbe, au moins par les quadratures ou [illegible] fications, etc. »

Tentamen de motuum cœlestium causis, ou Essai su[r le mou]*vement des planètes* (Acta Eruditorum, 1689.)

Peut-être Newton a-t-il été blessé de voir Leibniz [illegible] nouveau une question qu'il avait lui-même si complèt[ement] [illegible] cidée. En général, il est peu convenable d'aller fourrage[r] [illegible] champ défriché par un émule encore vivant. Toutefois, [illegible] en admettant qu'il le pût, n'avait pas jugé à propos d'[illegible] le calcul infinitésimal à la solution de la question des [illegible] ments des astres qui composent notre système plan[étaire] [illegible] Leibniz avait assurément le droit de choisir cet exem[ple] [illegible] mettre en lumière la puissance de sa méthode différentie[lle].

Mais il s'en faut beaucoup que toutes les parties de [illegible] *tamen* soient excellentes. Leibniz en effet débute par de[s] [illegible] cipes absolument dépourvus de bases et qui, au reste, se[mblent] n'avoir d'autre but que de battre en brèche, celui de la [illegible] tation universelle. Il abandonne, il est vrai, bientôt ap[illegible] champ des hypothèses, pour aborder plus sérieusement le [pro]blème de la recherche de la force qui retient les planète[s] [illegible] leurs orbites. Mais alors il se trompe plusieurs fois d'une ma[illegible] grave, dans des passages, il est vrai, tout à fait superflus.

Nous passons un discours préliminaire, heureusement [illegible]

il est question de Pythagore, d'Aristote, de Ptolémée, ·nic, de Tycho et de ses travaux herculéens, de Képler, ırtes, et de Cassini; des hypothèses anciennes sur les *ences* directrices des astres, sur les *Sphères solides*, les *hies* et *Influences magnétiques*, etc.

iz se prononce en faveur de l'opinion que les mouvements es sont produits par celui de l'éther, ou pour parler *niquement* (ce qui signifie peut-être obscurément) par *es déférents, mais fluides.* (*Ut astronomicè loquar, ab deferentibus quidem, sed fluidis.*)

ous les corps qui décrivent des lignes courbes dans un ont actionnés par le mouvement de ce fluide.

emment; mais Leibniz semble croire qu'aucune autre ıe puisse s'exercer sur ces corps.

e là résulte que *les planètes sont mises en mouvement r éther* (*planetas moveri a suo ethere*).

eibniz, dans tout son article, rapporte les mouvements rés à des coordonnées polaires et décompose chacun d'eux, nous le ferions, en un mouvement de circulation et un nent suivant le rayon, qu'il appelle *paracentrique;* il dit mouvement de circulation est *harmonique* lorsque la le ce mouvement varie en raison inverse du rayon vecteur ile.

e de cette décomposition lui appartient en propre; elle utant plus remarquable que le choix des coordonnées n n'en employait d'aucun genre) est parfaitement appro- la nature de la question. Malheureusement Leibniz se un peu dans l'application, suivant son habitude.

4. ***Si le mouvement de circulation** d'un mobile au* ***point est harmonique**, **l'aire décrite par** le rayon vect* ***mobile sera proportionnelle au temps** et récipr* ***quel que soit le mouvement paracentrique.***

Newton démontre le théorème des aires en suppos dirigée vers un point fixe, c'est-à-dire qu'il entre de la question de Dynamique. Leibniz, comme on voit, loi des aires et trouvera que la force est dirigée vers ces aires.

5. Ce paragraphe se réduit à une explication con différents ordres d'infiniment petits : par exemple, si infiniment petit (*infinitè parvus*), la différence entre corde sera infiniment infiniment petite (*infinities infin*

6. Le mouvement de circulation des planètes autour est harmonique, ainsi que celui des satellites d'une plan d'elle; c'est-à-dire que la vitesse de circulation de chac corps varie en raison inverse de sa distance au centre, d'après l'observation, l'aire décrite par chaque rayon croît proportionnellement au temps.

7. *On doit convenir aussi que l'éther ou l'orbe fluide planète est emporté d'un mouvement harmonique.* Car démontré plus haut.... que le décret promulgué par touchant les tourbillons n'était pas encore abrogé.

8. C'est pourquoi nous admettrons que les plan animées de deux mouvements, c'est-à-dire du mouvem posé d'une circulation harmonique et d'un transport trique, la première due au mouvement de leurs orbes fluid *sui fluidi deferentis*) et le second à une sorte de gravité, attr ou impulsion vers le Soleil.

Leibniz
par les orl
se meut
propre, m
(en suiva
s'élève (c'
(pourquo
plus grar
facilemen

9. La
quée, pas
conçu c
dérivent,
fluides.

10. Co
qu'il déc
(*excussor*
mobile d
point pa
tangente
distance

En réa
de cette
mobile à
Leibniz
pour tou
mouvem

Leibn
du mou

M. Mar

z donne ici une curieuse explication de l'action exercée
·bes fluides : la circulation de l'éther fait que la planète
harmoniquement, sans qu'elle ait ce mouvement en
nais parce qu'elle se déplace par une natation tranquille
ınt simplement le cours du fluide), de sorte que, si elle
:'est-à-dire, si elle s'éloigne du centre), sa vitesse diminue
ɔi ?), et que, si elle s'abaisse, elle s'accommode à la vitesse
nde des couches inférieures, et cela se fait d'autant plus
nt..... que tout se passe dans l'imagination.

circulation harmonique étant ainsi (clairement) expli-
ıssons au mouvement paracentrique : le Soleil peut être
comme un grand aimant, et les actions magnétiques
:, sans doute possible (*haud dubiè*), des impulsions des

lomme tout mobile s'efforce de s'écarter de la ligne courbe
crit, par la tangente, il sera permis d'appeler *excussif*
ɔrium) cet effort auquel est égale la force qui empêche le
de s'échapper : nous pourrons mesurer cet effort en un
ar la perpendiculaire abaissée du point suivant sur la
e au premier; les deux points n'étant séparés que par une
: inassignable.

ealité, l'accélération centrifuge est le double du quotient
perpendiculaire par le carré du temps employé par le
à passer d'un des points à l'autre; quant à ce temps,
le suppose pris une fois pour toutes, c'est-à-dire le même
ıs les mouvements, et à toutes les époques, pour un même
nent; c'est pour cela qu'il ne le mentionne pas.

ıiz n'avait pas plus songé que Newton à formuler les lois
ıvement uniformément varié. Nous ne verrons apparaître

que bien plus tard la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2.$$

11. L'effort centrifuge dans un mouvement de c[...] peut être exprimé par le sinus verse de l'arc décrit (les li[...] gonométriques, à cette époque, étaient encore des longu[...] par la différence entre la sécante de ce même arc et le r[...]

De là il résulte que le sinus verse étant en raison dou[...] corde, ou de l'arc, ou de la vitesse, les forces centrifuges d[...] qui décrivent uniformément des circonférences égales [...] raison doublée des vitesses; et que, si les circonfére[...] différentes, ces forces centrifuges sont en raison compo[...] raison doublée des vitesses et de la raison réciproque de[...] rayons.

C'est encore le langage de Huyghens.

12. La force centrifuge d'un mobile dont la circul[...] harmonique varie en raison inverse de la raison tri[...] rayons. Cela résulte du dernier corollaire de la propositio[...] dente.

Cela posé, soit θa une surface constante égale au do[...] l'aire M_2SM_3 (*fig.* 22) décrite dans un des intervalles é[...] temps : le quotient de cette aire par le rayon SM_2, ou [...] distance M_3D_2 de M_3 à SM_2; on aura donc

$$M_3D_2 = \frac{\theta a}{\rho};$$

d'un autre côté, si l'on rabat le rayon SM_3 en ST_2, D_2T_2 [...] sentera l'effort centrifuge, dans le mouvement de circul[...]

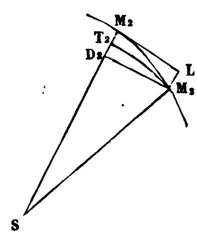
$$D_2 T_2 = \frac{\overline{M_3 D_2}^2}{2 SM_3};$$

le l'effort centrifuge sera donc

$$\frac{\theta^2 a^2}{2\rho^3}.$$

:é, si dA représente le double de l'aire décrite dans le

Fig. 22.



et qu'on désigne par v la vitesse dans le mouvement on,

$$dA = v\, dt\, \rho;$$

$$v = \frac{1}{\rho} \frac{dA}{dt};$$

uent

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2,$$

remplace dA par $a\theta$,

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho^3} \frac{a^2\theta^2}{dt^2}.$$

Leibniz ne représente donc la force centrifuge que par
comme nous l'avons déjà fait remarquer. Cela peut être
puisqu'il ne s'agit que de représentation proportionnelle,
bien entendu, que la même proportion soit gardée entre
les forces considérées dans la même question.

13. Il s'agit dans ce paragraphe de l'hypothèse où,
temps que le mouvement de circulation serait harmoni
qui s'effectue dans la direction du rayon serait uniforme
omettons ce passage.

14. La force paracentrique en M_2 (*sollicitatio para*
est représentée par la droite M_3L, menée du point M_3
voisin de M_2, parallèlement au rayon SM_2, et termi
tangente en M_2 à la trajectoire.

Il y a là une double erreur : en premier lieu,

$$\frac{2\,LM_3}{dt^2}$$

est l'accélération totale du mobile : en enlevant donc le
$\frac{2}{dt^2}$, dont Leibniz a déjà fait abstraction dans l'estimation
force centrifuge, relative au mouvement de circulation,
drait regarder LM_3 comme représentant la force totale
sur le mobile. Mais Leibniz a voulu décomposer cette for
deux : la force développée par l'éther ambiant qui retient la
nète dans la trajectoire de son mouvement de circulation
sollicitation paracentrique; il faudrait donc regarder LM_3 c
représentant proportionnellement la somme de ces deux
En réalité, en désignant par j_c et j_p les accélérations dues
force centripète et à la *sollicitation paracentrique*, il fa

poser

et, par

15.
l'éléme

c'est-à
centre,
double
Soie
les ar
égaux
ST_2 =
de M

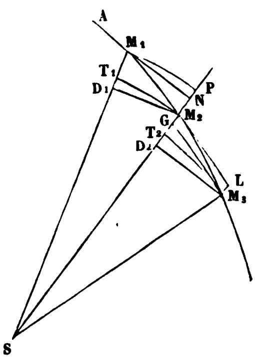
$$\frac{2\,LM_3}{dt^2} = \dot{j}_c + \dot{j}_p,$$

séquent,

$$\dot{j}_p = \frac{2\,LM_3}{dt^2} - \dot{j}_c.$$

s tout mouvement où la circulation est harmonique, de l'impulsion paracentrique (*impetus paracentrici*),

Fig. 23.



e l'incrément de la vitesse pour descendre vers le la différence entre la sollicitation paracentrique et le l'effort centrifuge.

fig. 23) $AM_1M_2M_3\ldots$ la trajectoire du mobile, où $_1M_2$ et M_2M_3 sont supposés parcourus dans des temps S le centre des aires; $SP = SM_1$, $ST_1 = SM_2$ et $_3$; M_1N, M_2D_1 et M_3D_2 les perpendiculaires abaissées et M_3 sur SM_2, SM_1 et SM_2; enfin M_2L la tangente à

la trajectoire en M_3, et LM_3 la parallèle à M_2S, déjà ...
dans la proposition précédente.

« Puisque, dit Leibniz, la circulation est harmoni... triangles M_1SM_2 et M_3SM_2 sont équivalents; donc, ces ... ayant même base SM_2, leurs hauteurs M_2N et M_3D_2 sont ...

Ce point est exact.

« Prenons $M_2G = LM_3$ et joignons M_3G, qui sera ... à LM_2 : les deux triangles

$$M_1NM_2 \text{ et } M_3D_2G$$

seront semblables, et, comme

$$M_1M_2 = GM_3,$$

on aura aussi

$$NM_2 = GD_2. \text{ »}$$

Ce point pourrait être admis si l'on avait à faire la ... $NM_2 + GD_2$, que l'on remplacerait, sans difficulté, par ... par $2\,GD_2$; mais si c'est la différence $NM_2 - GD_2$, de ces infiniment petits du premier ordre, dont on a besoin, et ... termes de l'équation à laquelle on veut arriver soient du ... ordre, il y aura erreur à considérer cette différence comme ...

« Cela posé,

$$PM_2 = SM_1 - SM_2,$$

et

$$M_2T_2 = SM_2 - SM_3,$$

mais déjà

$$PM_2 = NM_2 + NP = GD_2 + NP,$$

d'après ce qui vient d'être dit; et

$$M_2T_2 = M_2G + GD_2 - D_2T_2;$$

fférence

$$PM_2 - M_2T_2$$

d'une part, à la différence seconde des rayons, et, de

$$NP + D_2T_2 - M_2G,$$

e à

$$2\,D_2T_2 - M_2G,$$

$$NP = D_2T_2.$$

é donc

$$dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G. \text{ »}$$

avait pas inconvénient à remplacer $NP + D_2T_2$ par ais il ne fallait pas supprimer la différence $NM_2 - GD_2$ on véritable serait

$$dd\rho = (NM_2 - GD_2) + 2\,D_2T_2 - LM_3.$$

en soit, voici comment Leibniz traduit l'équation à est parvenu,

$$dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G :$$

fférence des rayons exprime la vitesse suivant le rayon férence seconde exprime l'élément de cette vitesse suivon; d'un autre côté, D_2T_2 représente l'effort centrifuge ı LM_3 représente la gravité (*sollicitatio gravitatis*). *ment de la vitesse paracentrique est la différence entre le l'effort centrifuge et la gravité simple.* »

nous divisons par dt^2 les deux membres de l'équation

',

$$PM_2 - M_2T_2 = dd\rho = 2\,D_2T_2 - M_2G,$$

elle donne

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = 2\,\frac{D_2T_2}{dt^2} - \frac{M_2G}{dt^2}.$$

Or $-\frac{d^2\rho}{dt^2}$ est l'accélération du mouvement suivant comptée positivement dans le sens MS_2; $2\,\frac{D_2T_2}{dt^2}$ est l'acc dans le mouvement de circulation; et enfin $\frac{M_2G}{dt^2}$ est de l'accélération totale. Mais cette accélération totale composer de la sollicitation paracentrique et de la force pète correspondant au mouvement de circulation. La de l'équation aurait donc dû être : *L'incrément de la pour descendre vers le centre est la différence entre centripète et la moitié de la somme de la sollicitation trique et de la force centripète*

$$-\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{1}{2}(j_p + j_c) - j_c$$

$$= \frac{1}{2}\,j_p - \frac{1}{2}\,j_c.$$

Ainsi Leibniz n'a pas traduit exactement l'équation qu obtenue. Mais, comme nous l'avons déjà fait pressenti équation même est fausse. En effet, on sait que, dans un ment rapporté à des coordonnées polaires, lorsque la loi des s'observe par rapport au pôle, l'accélération totale, dirig mobile vers le centre d'action, est la somme de l'accélératio tripète, correspondant au mouvement de circulation, et de l lération suivant le rayon, comptée positivement du mobile centre d'action. Or l'accélération totale est ici $2\,\frac{M_2G}{dt^2}$; par

eibniz aurait dû trouver

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = 2\,\frac{D_2T_2}{dt^2} - 2\,\frac{M_2G}{dt^2}.$$

l'on connaît l'incrément de la vitesse suivant le rayon, aîtra la force de la gravité, car on connaîtra toujours la trifuge.

et, elle est représentée par $\omega^2\rho$, ω désignant la vitesse an- le circulation; mais on a

$$a\theta = \rho^2\omega\, dt,$$

$$\omega^2\rho = \frac{(a\theta)^2}{dt^2}\,\frac{1}{\rho^3}.$$

ans un mouvement où la circulation est harmonique, les nts de l'angle, pour des éléments égaux du temps, sont uement proportionnels aux carrés des rayons; car les ions sont entre elles dans la raison composée de l'angle u et du rayon; et les circulations élémentaires sont en éciproque doublée des rayons.

-à-dire

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'^2}{\rho^2},$$

ue

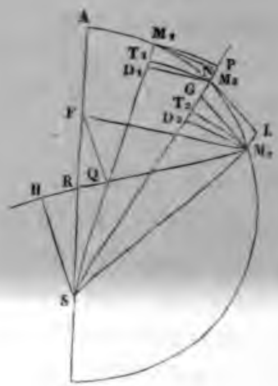
$$\omega = \frac{a\theta}{\rho^2\, dt} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{a\theta}{\rho'^2\, dt}.$$

Si une ellipse est décrite d'un mouvement harmonique de l'un de ses foyers, la vitesse de circulation, T_2M_2 ou *fig.* 24), la vitesse suivant le rayon, M_2D_2 et la vitesse bile lui-même, M_2M_2 seront respectivement entre elles

comme le petit axe $2b$, la moyenne proportionnel[illegible] résultats obtenus en ajoutant à la distance $2c$ des [illegible] les différences $\rho - \rho'$ et $\rho' - \rho$ des rayons vecteurs [illegible] foyers au point où se trouve le mobile, c'est-à-dire

$$\sqrt{4c^2 - (\rho - \rho')^2},$$

Fig. 24.



et enfin

$$2\sqrt{\rho\rho'}.$$

En effet, si l'on mène la normale à l'ellipse en M_3 et [illegible] abaisse du foyer S la perpendiculaire SH sur cette norm[illegible]

$$HM_3,\ SH \quad \text{et} \quad M_3S$$

seront proportionnels à

$$D_2M_3,\ M_2D_2 \quad \text{et} \quad M_2M_3,$$

c'est-à-dire à la vitesse de circulation, à la vitesse su[illegible]

la vitesse du mobile, parce que les triangles

$$HM_3S \quad \text{et} \quad D_2M_3M_2 \quad \text{ou} \quad T_2M_3M_2$$

ablables, comme étant rectangles et ayant leurs angles
ux.

a donc de démontrer que

$$HM_3, \ SH \quad \text{et} \quad M_3S$$

tivement proportionnels à

$$2b, \quad \sqrt{(2c+\rho-\rho')(2c+\rho'-\rho)} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\rho\rho'},$$

n vérifiera aisément en abaissant aussi du second foyer endiculaire FQ sur la même normale, de façon à obtenir e FM_3Q semblable à SM_3H, et sachant d'ailleurs que le le la normale sur l'axe divise la distance des foyers en roportionnelles aux deux rayons vecteurs.

une ellipse est décrite d'un mouvement harmonique le l'un de ses foyers, l'attraction qu'éprouvera le mobile oyer sera directement proportionnelle au carré de la cir-, ou réciproquement proportionnelle au carré du rayon

avons trouvé cela, dit Leibniz, par une application élé- notre calcul différentiel, ou de l'analyse des infinis. sentons le double de l'élément M_1SM_2 de l'aire par

$$2\frac{b^2}{a}\theta,$$

lation, D_2M_3 sera $2\dfrac{b^2}{a}\dfrac{\theta}{\rho}$,

$$D_2M_3 = 2\frac{b^2}{a}\frac{\theta}{\rho},$$

et D_2M_2 sera $d\rho$,

$$D_2M_2 = d\rho.$$

Mais, d'après la proposition précédente,

$$\frac{D_2M_2}{D_2M_3} = \frac{\sqrt{4c^2-(\rho'-\rho)^2}}{2b} = \frac{\sqrt{4c^2-(2a-2\rho)^2}}{2b} = \frac{\sqrt{c^2-\dots}}{}$$

on aura donc

$$\frac{d\rho}{2\,\frac{b^2}{a}\,\frac{\theta}{\rho}} = \frac{\sqrt{c^2-(\rho-a)^2}}{b},$$

ou

$$b\rho\, d\rho = 2\,\frac{b^2}{a}\,\theta\sqrt{c^2-(\rho-a)^2},$$

qui est l'équation différentielle du mouvement, dont *differentio-différentielle* est

$$b\, d\rho^2 + b\rho\, dd\rho = -\,2\,\frac{b^2}{a}\,\theta\,\frac{(\rho-a)\,d\rho}{\sqrt{c^2-(\rho-a)^2}},$$

d'après les principes du calcul que nous avons expos *Journal*. Si l'on élimine $d\rho$ entre ces deux équations, réductions faites,

$$d\,d\rho = \frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3} - \frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2},$$

« Ce qui démontre, dit Leibniz, la proposition én $dd\rho$ mesure l'élément de la vitesse suivant le rayon, $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3}$ double de l'effort centrifuge, il faut donc que $\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2}$ repr gravité. Cette force varie donc en raison inverse du ca distance. »

abord, en réalité, $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3}$ représente la force centrifuge
ouvement de circulation, ou plutôt l'accélération cen-
non pas le double de cette accélération, de sorte que,
it les deux membres de l'équation de Leibniz par dt^2,
tant par j_c l'accélération centripète $\frac{4b^4\theta^2}{a^2\rho^3 dt^2}$, et par j_r
ion du mouvement suivant le rayon, comptée positi-
e M vers S, laquelle est $-\frac{d^2\rho}{dt^2}$, cette équation devient

$$\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2 dt^2} = j_r + j_c.$$

re côté, l'accélération totale, dirigée du mobile vers le
ction, dans un mouvement où la loi des aires s'observe,
ne nous l'avons déjà dit,

$$j = j_r + j_c,$$

quent

$$\frac{4b^2\theta^2}{a\rho^2 dt^2}$$

e l'accélération totale du mouvement, et non pas la gra-
que l'entend Leibniz, c'est-à-dire : la sollicitation para-
qu'il faudrait combiner avec la force centripète pour
force effective.

it toutefois observer que, si la traduction est inexacte,
n, du moins, est juste.

n avait trouvé pour l'accélération totale

$$j = \frac{8K^4}{L\rho^2} = \frac{8K^4}{\frac{2b^2}{a}\rho^2},$$

K^2 désignant l'aire décrite dans l'unité de temps, c'est-que Leibniz représente par

$$\frac{\frac{b^2}{a}\theta}{dt}.$$

La formule de Newton revient donc à

$$j = 4\,\frac{\frac{b^2}{a}\theta^2}{\rho^2\,dt^2} = 4\,\frac{b^2}{a\rho^2}\left(\frac{\theta}{dt}\right)^2.$$

Ainsi, il y a identité.

En résumé, Leibniz a, dans cette question, com faute, et tout cela pour avoir introduit contre toute idée aussi bizarre que préconçue, celle de la décom deux de la force qui agit sur une planète.

S'il s'était borné aux quelques lignes qui compo méros 18 et 19, il aurait eu l'avantage sur Newton Newton a lu le *Tentamen*, il n'a pas dû en être bien

Les propositions suivantes ayant moins d'import nous bornons à en traduire les énoncés :

20. La même planète est attirée par le Soleil avec u variable et qui est en raison doublée de la distance.

Leibniz, dans ce passage, dit qu'il ne connaît le *Principes* que par le compte rendu qui en a été fait *Acta Eruditorum*. Il aurait dû le lire entièrement avant son *Tentamen*, et Newton a pu être justement froissé d de dédain injustifiable.

21. L'attraction exercée sur une planète est à la force de cette planète comme sa distance actuelle au Soleil est du *latus rectum* de l'ellipse qu'elle parcourt.

22. La vi
vitesse parac
culaires.
23. La vi
nimum à l'a
24. La vi
de la planète
Elle est nul
25. La fo
l'attraction
26. Les i
de l'action c
les angles d
27. Le m
dire qu'elle
point de son
28. Il y
quatre son
principale
29. Les
boles ou d
que l'attra
trifuge ét
sait; et, d
branche c
était rep
branche

Excen

ıtesse d'une planète est toujours plus grande que sa
:entrique, parce que les trajectoires sont presque cir-

.tesse de circulation est maximum au périhélie, mi-
ıphélie.

ƭesse paracentrique est minimum lorsque la distance
: au Soleil est la moitié du *latus rectum* de l'orbite.
le au périhélie et à l'aphélie.

rce centrifuge d'une planète est toujours moindre que
exercée sur elle par le Soleil.

mpulsions (*impetus*) que la planète reçoit (*concepit*)
ontinue du Soleil, dans des parcours finis, sont comme
:s rayons vecteurs extrêmes.

ouvement de chaque planète est périodique, c'est-à-
se retrouve dans les mêmes conditions, au même
orbite, après une révolution complète.

a donc dans l'orbite six points remarquables : les
nets et les deux extrémités du *latus rectum* (corde
ıenée par le foyer).

ırbites des planètes sont des ellipses, et non des para-
hyperboles, parce que la force centrifuge est moindre
ion. Le mouvement serait parabolique si la force cen-
égale à l'attraction, hyperbolique si elle la surpas-
ıs ce cas, le centre d'attraction serait intérieur à la
yperbole décrite. Si, au lieu d'être attirée, la planète
ısée, le centre de répulsion serait en dehors de la
courue.

m ex epistola auctoris quam pro sua hypothesi phy-

sica motus planetarii ad amicum scripsit, c'est-à-dire *d'une lettre que l'auteur écrivit à un ami sur son physique relativement au mouvement des planètes*. ditorum, 1706.)

Leibniz, dans cet extrait, répond à des objections avaient été faites, et avoue assez ingénument ses tor y commet de nouvelles fautes encore plus graves.

« Un savant homme, dit-il, qui, dans un ouvrage sur nomie, combattit, il y a quelques années, mon hypothè pas assez bien saisi la force et l'utilité. Elle a cela de p rement commode que les corps solides, circulant harmo dans un fluide ayant un mouvement semblable, se comme ils feraient dans le vide, c'est-à-dire dans un résistant, etc.

« Cependant, je dois convenir qu'il y a dans mo quelque chose à améliorer sinon pour le fond, au moi aux énoncés, ce qui fera mieux apparaître l'accord des Ainsi l'on doit dire que l'impulsion paracentrique rés gravité et de l'effort centrifuge *simple*, et non pas double je l'avais dit par une interprétation inexacte d'un terme

« Il est certain que la gravitation engendre à chaque une nouvelle tendance à tomber vers le centre, mais la f trifuge en engendre une autre à s'en éloigner, et tou varient avec la distance à ce centre. L'effort total cons leur différence et a la direction de la plus grande. »

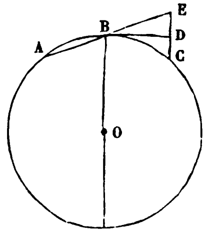
On voit que cela ne s'éclaircit pas beaucoup; mais nous tomber dans une obscurité complète :

« L'effort centrifuge peut être entendu de deux man

considère le mouvement précédent comme se fai-
a tangente au cercle, ou suivant l'arc de cercle

nds la parole, pour aller un peu plus vite. Soient
le mobile vient de parcourir, et BC celui qu'il va
ın temps égal : si, lorsque le mobile est en B, on
se soit mû suivant la tangente BD, la force centri-

Fig. 25.



sentée par CD $\left(\text{en réalité } 2\,\frac{\text{CD}}{dt^2}\right)$; mais, si on le
me ayant décrit l'arc AB ou sa corde, alors la force
CE, double de CD. Il y a donc deux forces centri-
ce centrifuge *tangentielle* et la force centrifuge

vait considéré que la force centrifuge tangentielle,
nt qu'il vaut mieux prendre l'arcuelle et changer
n voit qu'il ne s'est pas encore aperçu de son erreur,
)lement de ce qu'au lieu de recourir aux équations,
proportions, comme Galilée, Huyghens et Newton.
écrire

$$\text{DC} = \frac{1}{2}\,j\,dt^2,$$

il en aurait tiré

$$j = \frac{2\,\mathrm{DC}}{dt^2},$$

au lieu de : j est représenté proportionnellement par D…

Quoi qu'il en soit, se trouvant rassuré par son inve… force centrifuge arcuelle, il conclut par ces mots : … *quidem error, sed tamen inconcinnitas prodiit,* qu… *sublatam esse juvabit.* C'est-à-dire : Il n'y avait pas p… erreur, mais cependant maladresse ; et il sera réjoui… voir disparaître.

Il termine par une liste d'errata assez étendue, car il … même des lignes dans ses figures. Ainsi la ligne M… trouve pas.

Il résulte assez clairement de cet extrait que, même … Leibniz n'avait pas encore lu le livre des *Principes.*

De linea isochrona in qua grave sine acceleratione … (Acta Eruditorum, 1689), et *Constructio propria* pr… *de curva isochrona paracentrica.* (Acta Eruditorum, 1…

Le premier de ces mémoires contient la solution d'un p… que Leibniz avait proposé aux Cartésiens en 1678 dans le… *velles de la République des lettres.* Il s'agissait de tr… *courbe le long de laquelle un corps pesant descendrait* … *teurs égales en des temps égaux.* Les équations de cette … sont

$$\frac{dy}{dt} = k$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0).$$

ıinant le temps et intégrant l'équation résultante, on une parabole quadrato-cubique, dont l'équation, si l'on rte l'origine au point de départ, est

$$9g^2k^2(x+c)^2 = (2gy - k^2)^3,$$

ıant une constante.

comme la question n'avait pas été résolue par les Carté- Leibniz ne fait pas connaître la méthode au moyen de : il est parvenu au résultat et se borne à la vérification

narque seulement que, de toutes les courbes qui répon- la question, celle le long de laquelle la descente sera le pide aura sa tangente verticale au point de départ.

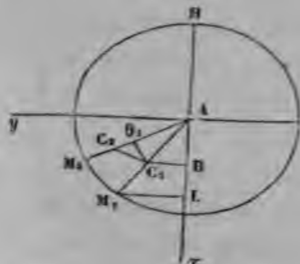
rmine en proposant à ses adversaires ce nouveau défi : *:r la courbe qu'un corps pesant devrait parcourir pour distance à un point fixe variât de quantités égales dans ıps égaux.*

: ce problème qui fait l'objet du second mémoire.

ues Bernoulli s'en était occupé à propos de la courbe élas- mais Leibniz trouvait plusieurs défauts à la solution de .i et disciple : la marche suivie pour la mise en équation du ne était trop compliquée; la solution n'était pas assez , enfin Bernoulli avait négligé, dans l'intégration, d'intro- ıne constante arbitraire, ce qui, dit Leibniz, est indispen- i l'on veut donner aux solutions toute leur généralité. Il : Comme je vois que cette règle n'est pas assez observée, ılu l'enseigner ici.

Voici la solution de Leibniz : Soient A (*fig.* 26) le p
dont le mobile doit s'approcher ou s'éloigner de quan
dans des temps égaux, H le point d'où ce mobile part san
(Leibniz le place sur la verticale du point A) et AH =
d'ailleurs C_1 et C_2 deux positions infiniment voisines
M_1 et M_2 les points de rencontre de AC_1 et AC_2 avec la

Fig. 26.



férence du cercle décrit de A comme centre avec AH pour
C_1C_2 sera représenté par dc, M_1M_2 le sera par dm; qu
temps employé par le mobile pour aller de C_1 en C_2, ce s
soient encore C_1B et M_1L des perpendiculaires à HA, AB
représenté par x et AL par z : si v désigne la vitesse du m
en C_1, on aura d'abord

$$(1) \qquad dc = v\,dt;$$

littéralement : dc sera comme $v\,dt$ (dc *ut* $v\,dt$). Leibniz se
il est vrai, de l'équation (1), mais il ne la pose pas, parce qu
comme on va le voir, sera une longueur.

D'un autre côté, puisque, arrivé en C_1, le mobile est desc
d'une hauteur $a + x$, il faudrait poser $v^2 = 2g(a+x)$, m

$$v^2 = a + x,$$

nt : v^2 *ut* $a + x$,), ce qui ne l'empêche pas se servir de
2).

rait des deux équations précédentes

$$dc = dt\sqrt{a + x},$$

l'homogénéité, dit Leibniz (*ad implendam legem*
·um), nous poserons

$$dc = dt\,\frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}.$$

véritable serait $dc = dt\sqrt{2g(a+x)}$.

menons $C_1\theta_1$ perpendiculaire à AC_2, on aura

$$\overline{C_1C_2}^2 = \overline{C_2\theta_1}^2 + \overline{C_1\theta_1}^2.$$

ıiz suppose, mais sans le dire, le temps représenté
ce du mobile au point A, de sorte que $t = AC_1$; il en
u moment où le mobile était en H, l'horloge devait

ıuence, Leibniz pose

$$C_2\theta_1 = dt,$$

ailleurs

$$\frac{C_1\theta_1}{AC_1} = \frac{M_1M_2}{AM_1},$$

t, en remplaçant AC_1 par t,

$$C_1\theta_1 = \frac{t\,dm}{a}.$$

L'égalité (4) peut donc être écrite sous la forme

$$(4) \qquad \overline{dc}^2 = \overline{dt}^2 + t^2\,\overline{dm}^2;$$

(Leibniz écrit $dc\,dc = dt\,dt + tt\,dm\,dm$), ou en rempl
par sa valeur fournie par l'équation (3),

$$(5) \qquad dt^2 + t^2\,dm^2 = dt^2 + dt^2\,\frac{x}{a},$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{dt}{t} = \frac{dm}{\sqrt{ax}};$$

(Il faudrait

$$\left.\frac{dt}{t} = \frac{a\,dm}{\sqrt{ax}}\right).$$

Cela posé, les deux triangles semblables BAC_1 et LA
nent

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AC_1}{AM_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{z} = \frac{t}{a},$$

d'où

$$(7) \qquad ax = tz;$$

et, en substituant dans l'équation (6), il vient

$$(8) \qquad \frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{dm}{\sqrt{az}};$$

enfin z étant le cosinus (linéaire) de l'arc m

$$dm = \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}};$$

tégrant, (*unde summando*)

$$2\sqrt{at} = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}} + b,$$

quantité constante, prise arbitrairement. Quant à la
, Leibniz la remplace par une rectification.
ferons sur cette solution qu'une seule remarque, c'est
l, substituer l'équation

$$dc = dt\,\frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}$$

. véritable

$$dc = dt\sqrt{2g(a+x)},$$

.pposer a égal à $2g$ et à multiplier le temps par a; en
que, dans la traduction, l'énoncé a perdu de sa généra-
t, pour traduire exactement l'énoncé, il aurait fallu

$$AC_1 = kt,$$

constante donnée. Mais alors les termes qui se dé-
.s l'équation (5)

$$dt^2 + t^2 dm^2 = dt^2 + dt^2\,\frac{x}{a},$$

ılus disparu, parce que, dans le premier membre dt^2
ɔur coefficient k^2, et, dans le second $2ga$; *ni fallor*,
ıouvent Leibniz.

Le mémoire débute par des considérations théoriques avons remarqué la notation d^2y au lieu de ddy qu'on employait précédemment.

De linea in quam flexile se pondere proprio curvat usu insigni ad inveniendas quotcumque medias prop et logarithmos. C'est-à-dire : *Sur la ligne suivant la fil se courbe par son propre poids et du remarquable cette ligne pour trouver des moyennes proportion nombre quelconque et les logarithmes.* (Acta Eruditorum

De solutionibus problematis catenarii, aliisque a D. Bernoullii propositis. (Acta Eruditorum, 1691.) C'est-à-dire *les solutions du problème de la chaînette et de quelques proposés par Bernoulli.*

De la chaînette, ou *Solution d'un problème fameux par Galilée, pour servir d'essai d'une nouvelle an infinis, avec son usage pour les logarithmes, et une à l'avancement de la navigation.* (*Journal des Savants* en français.)

Ces articles contiennent des développements histor nous nous emparons d'abord ; nous donnerons ensuite du problème de la chaînette, d'après Leibniz.

« L'analyse ordinaire de Viète et de Descartes consis a réduction des problèmes à des équations et à des li certain degré, M. Descartes, pour maintenir l'universa suffisance de sa méthode, trouva à propos d'exclure de métrie tous les problèmes et toutes les lignes qu'on ne

e méthode, sous prétexte que tout cela n'était que is comme, dans ces problèmes, ces lignes peuvent ; ou imaginées par le moyen de certains mouve- u'elles ont des propriétés importantes, et que la t souvent, on peut dire qu'il fit en cela une faute lle qu'il avait reprochée à quelques anciens, qui s aux constructions où l'on n'a besoin que de la ıpas, comme si tout le reste était mécanique. »
déjà dit que Leibniz revient un peu trop souvent ı tort de Descartes : c'est sans doute l'entêtement ésiens de son temps dans la doctrine stricte du ait Leibniz.
əniz ayant remarqué qu'il y a des problèmes et des ont d'aucun degré déterminé, c'est-à-dire qu'il y s dont le degré même est inconnu, ou demandé, ont une seule passe continuellement de degré en ıverture le fit penser à un calcul nouveau, qui inaire, mais que la nature a réservé pour ces sortes ranscendants qui surpassent l'Algèbre ordinaire. ppelle l'***analyse des infinis***, qui est entièrement a Géométrie des indivisibles de Cavalieri et de des infinis de M. Wallis. Car cette Géométrie de est très bornée d'ailleurs, est attachée aux figures, les sommes des ordonnées; et M. Wallis, pour echerche, nous donne par induction les sommes gs de nombres; au lieu que l'analyse nouvelle des rde ni les figures, ni les nombres, mais les gran- al, comme fait la spécieuse ordinaire. Elle montre nouveau, etc.

« Une partie des éléments de ce calcul, avec plusieu lons, a été publiée dans le *Journal de Leipsig*, où appliqué particulièrement à quelques problèmes physiques; comme par exemple à la ligne isochrone, un corps pesant approche uniformément de l'horizon dant; à la ligne loxodromique, ou des rumbs de résoudre les plus utiles problèmes géométriques de la où l'on n'était arrivé jusqu'ici qu'imparfaitement p tables subsidiaires; à la résistance des solides ou d pour avancer la mécanique, et particulièrement la aux lois harmoniques des mouvements planétaires, procher de la perfection de l'Astronomie; et à d'autre conséquence.

« Cette méthode fut applaudie, et suivie d'abord par personnes habiles. M. Craigh s'en servit en Angleterre; M. Bernoulli, professeur de Bâle, connu par plusieurs ductions de Mathématiques, l'ayant étudiée et en ayant l'importance, pria l'auteur publiquement de l'appli recherche de la ligne d'une chaînette suspendue par bouts, que Galilée avait proposée, mais qu'on n'avait p déterminée jusqu'ici.

« L'auteur de la méthode y réussit d'abord, et, pour aux autres l'occasion d'exercer encore leur méthode, pr bliquement ce même problème, leur donnant le terme Le frère de M. Bernoulli ayant appris que cette méthode la médita de telle sorte qu'il vint à bout du problème, à connaître par là ce qu'on doit attendre de lui. MM. B poussèrent même la recherche plus loin, et l'appli d'autres problèmes, qui ont de l'affinité avec celui-ci.

« De ceu
que M. Hu
« J'ai lu
dantes du p
et la rectific
de courbur
M. Bernou
gravité à l'
même poin
du centre
« M. H
pose la qu

M. Jean B
drature de
Leibniz
qu'il écriv
plus haut
cette per
années le
publique
méthode
autres le
m'absor
vers les
jours p
lières.
Voic

ıx qui ont employé d'autres méthodes, on ne connaît ıyghens qui ait réussi.

. avec le plus grand plaisir les trois solutions concor- problème. Nous avons tous trouvé la loi des tangentes .cation de la courbe; M. Huyghens chercha son rayon re et sa développée, que donne aussi la solution de ılli. M. Huyghens trouva la distance de son centre de 'axe, M. Bernoulli et moi trouvâmes les distances du ıt tant à l'axe qu'à la base; j'y ajoutai la détermination de gravité de l'aire de la courbe.

uyghens, pour construire par points la chaînette, sup- ıdrature de la courbe

$$x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2;$$

Bernoulli et moi nous ramenons la question à la qua- l'hyperbole, etc. »

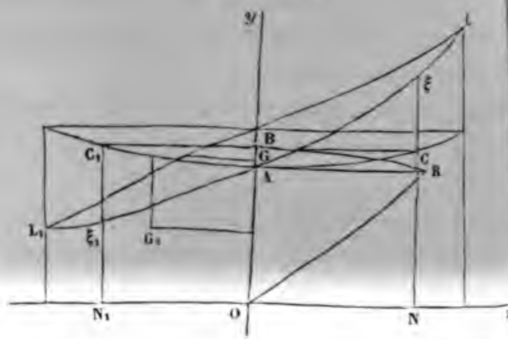
reproduit ici, à peu près dans les mêmes termes, ce ait à Bernoulli, dans une lettre que nous avons donnée sur son initiation aux Mathématiques, et termine par ée remarquable : « J'ai publié il y a déjà quelques éléments de mon calcul différentiel, préférant l'utilité ma gloire, que j'aurais pu mieux servir en cachant ma Mais il m'est plus agréable de voir dans les jardins des ruits de mes semences. Car je ne pouvais suffisamment r dans leur culture et il ne manquait pas d'autres buts els je pusse ouvrir des voies nouvelles, ce qui m'a tou- plus méritoire que de traiter les questions particu-

'solution donnée par Leibniz du problème de la chaî-

nette, solution que, malheureusement, il ne fait suivre d'aucune explication :

« Que l'on construise sur les deux axes OX et OY la logarithmique L_1L (*fig.* 27) dont les ordonnées soient les nombres, et les abscisses les logarithmes; que l'on prenne sur la courbe les deux points ξ, ξ_1 ayant leurs abscisses égales et

Fig. 27.



contraires, en sorte que la moyenne proportionnelle entre les ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$ sera OA, ou l'unité; si l'on prend ensuite la moyenne arithmétique OB entre ces deux ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$ et que par le point B on mène à OX la parallèle C_1BC : C_1 et C seront deux points de la chaînette. »

Cette construction fournit immédiatement l'équation de la chaînette : si N et $\frac{1}{N}$ sont les deux nombres représentés par les ordonnées $N\xi$ et $N_1\xi_1$, les coordonnées du point C sont

$$x = \log N \quad \text{et} \quad y = \frac{N + \frac{1}{N}}{2};$$

entre x et y la relation

$$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

nt la base du système des logarithmes considérés, base
iz laisse indéterminée.
ion de la chaînette, convenablement écrite, est

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right),$$

nt la longueur OA.
egrettons de ne pouvoir dire comment Leibniz a pu
le problème.
s solutions qu'il donne, également sans explications, de
blèmes relatifs à la courbe.
uire la tangente à la chaînette en un point C. Du point O
entre avec OB pour rayon, décrivez un cercle qui coupe
rizontale du point A, BOR sera l'inclinaison de la tan-
rchée sur l'horizontale.
er un arc AC *de la chaînette.* AR est la longueur de

er le segment ACNO *de la chaînette.* Ce segment est
ectangle dont les dimensions sont AO et AR.
er le centre de gravité d'un arc CAC_1 *de la chaînette.*
truira une quatrième proportionnelle à AR, à BC et
n ajoutera OB à cette quatrième proportionnelle et la
la somme obtenue donnera la distance OG du centre de
herché au point O.
er le centre de gravité du segment AC_1N_1O. L'or-

Supplementum Geometriæ dimen
omnium tetragonismorum effectio pe
multiplex constructio lineæ ex da
C'est-à-dire, autant qu'il est possible
plément de Géométrie évaluatoire et
courbes par le moyen des propriétés
Eruditorum, 1693.)

Nous passons un préambule fort lon
coup le reste.

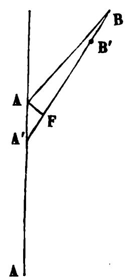
« Il est un genre de mouvements trè
transcendante, parce qu'il se rapporte
sidération des tangentes, qui est assez
des courbes par des fils reliés à des oml
je crois, employé le premier à des const

« Si l'on suppose qu'un poids soit at
fil AB (*fig.* 28) tendu sur un plan ho
décrire une certaine ligne à l'extrémité
que le fil reste toujours tendu, l'extrém
correspondante que l'on peut chercher à

is alors très occupé de questions relatives aux
›nnus aussitôt que le fil restait constamment
be décrite par le point B, et qu'ainsi la question
ıiner une courbe BB telle que la portion de sa
ıe entre le point de contact et une droite fixe
»

éveloppé le raisonnement de Leibniz : soit AA′

Fig. 28.



oite AA que l'on veut faire parcourir à l'extré-
aîne; que l'on joigne BA′, et que du point B
vec BA pour rayon, on décrive le petit arc de
›lacement AA′ du point A pourra se décomposer
ılacements AF et FA′; dans le premier, AF, le
era pas, mais la chaîne viendra en FB, ayant
F autour du point B; dans le second, au con-
se transportera de BF en B′A′, en entraînant le
B′ sur la droite BA′. L'élément BB′ de la courbe
int B fera donc un angle infiniment petit avec
dire que ce fil restera constamment tangent à la

être ramené à la recherche d'une
quant à leur direction, obéissent à u

Communicatio suæ pariter, duar
dum sibi primum a Dn. Jo. Bernoull
Hospitalio communicatarum solut
celerrimi descensus, a Dn. Jo. Ber
propositi, unà cum solutione sua pro
postea propositi. C'est-à-dire : *Envoi*
ainsi que de deux autres à lui adress
le marquis de l'Hospital, du problè
rapide descente, publiquement propos
Bernoulli; avec la solution du mêm
autre problème proposé plus tard par
(Acta Eruditorum, 1697.)

Outre le précis de la solution par L
brachystochrone, cet article contient
nous extrairons la partie la plus intéress
« L'usage de proposer publiquement

èmes élégants et utiles, surtout si ces hommes sont plus
x que laborieux.
ense que cet usage a beaucoup contribué au développe-
ma méthode infinitésimale des différences et des sommes
'ulgarisation par les soins d'hommes distingués, parce
été reconnue particulièrement propre à la solution de
es très remarquables (*insignibus*).
t ce qui fit que, comme j'allais répondre à un certain
telan, qui opposait je ne sais quelles objections à mes
es sur la *Dynamique*, et attribuait beaucoup trop de
ux méthodes cartésiennes, l'idée me vint de lui proposer,
à ceux qui pensaient comme lui, le problème peu difficile
.rbe isochrone. Mais ils gardèrent le silence, et M. Huy-
onna la solution, parce que la question lui avait paru
Cependant, comme il avait laissé quelques points dans
té, j'y suppléai et donnai ma démonstration dans les
'uditorum. Mais, comme toutes les choses s'enchaînent,
que M. Jacques Bernoulli, qui n'avait pas d'abord
une grande utilité à mon calcul différentiel, puisant là
ent une plus grande lumière, et entrevoyant l'usage
ouvait faire de cette méthode pour traiter les questions
que mathématique, me proposa le problème de la chaî-
en trouvai la solution et j'aurais pu, en la publiant,
l de la gloire qu'elle m'aurait acquise, mais je préférai
es autres au partage, afin de me préparer des coadjuteurs
elopper une très belle méthode. Car il est certain que les
ngénieux se laissent volontiers conduire par la gloire et
férent étudier les questions où tout n'a pas été fait par
C'est pourquoi je publiai que j'avais trouvé la solution,

mais que j'en différerais l'impression pendant une ann
laisser aux autres le temps soit de perfectionner leurs
méthodes, soit de méditer la mienne et de l'appliquer
blement.

« Cela me réussit heureusement. Car M. Huyghens (
pleurons aujourd'hui la perte) parvint à sa manière à une
imparfaite, il est vrai, comme il l'a depuis reconnu ingé
Mais M. Jean Bernoulli, après avoir davantage appro
méthode, obtint, avec son aide, la solution désirée,
réduction du problème à la quadrature de l'hyperbole,
seule différence qu'il construisait la courbe par la recti
la parabole, tandis que je me servais pour cela des log

« Un succès si remarquable excita merveilleusement
Bernoulli à développer la méthode différentielle et à
sorte qu'elle parût aussi bien leur appartenir qu'à moi
Bientôt après, M. Huyghens, qui n'en avait d'abord conçu
médiocre estime, le marquis de l'Hospital en France et M
en Angleterre suivirent leur exemple.

« Ce qu'a écrit M. Jacques Bernoulli sur la courbe qu
une voile gonflée par le vent et sur la courbe élastique
culièrement remarquable. Mais le marquis de l'Hospital
dernièrement dans un ouvrage excellent les principes mê
méthode et l'a enrichie d'applications exquises.

« Enfin, tout dernièrement, M. Jean Bernoulli, pro
Groningue, entreprit le problème de la ligne de plus rap
cente proposé d'abord par Galilée avec celui de la chaî
résolut et le proposa aux autres. Ainsi les deux admira
blèmes proposés par Galilée reçurent leur solution du sec
notre calcul.

Jean Bernoulli non seulement reconnut le premier que
de plus rapide descente est la cycloïde, mais il découvrit
courbe cachait un autre mystère, celui de présenter la
d'un rayon de lumière dans un milieu continuement
(de densité), courbure que M. Huyghens avait considérée
traité de la lumière, mais qu'il n'avait pas pu déter-

Jean Bernoulli proposa donc publiquement ce problème
Actes de Leipsig, et, par lettre privée, me demanda d'y
quelque temps. J'aurais pu surseoir à cette recherche,
de tant d'autres occupations, mais la beauté du pro-
'entraîna comme malgré moi et j'en vins à bout heureu-
Je communiquai ma solution à l'auteur et il me transmit
pour être imprimée en temps voulu.
me au bout de six mois, personne n'avait annoncé
trouvé la solution, M. Jean Bernoulli aurait pu en
la sienne réclamer la gloire d'une invention si élégante,
i aurais conseillé si j'avais songé davantage à notre in-
l'utilité publique. Mais nous convînmes de prolonger le
six autres mois, quoique nous pussions aisément prévoir,
ailleurs j'avais prédit par lettre à M. Jean Bernoulli,
que nous voyons avoir enfin atteint la solution de-
parvenir s'ils s'y efforçaient suffisamment, surtout ceux
raient de nos inventions antérieures, et il n'est pas in-
remarque que ceux-là seuls résolurent le problème
is prévus en être capables, c'est-à-dire ceux seulement
ent pénétré assez profondément dans les mystères de
cul différentiel. Mais comme, en dehors du frère de
t du marquis de l'Hospital, j'avais ajouté d'abondance

pas paraître mépriser des hommes
peut manquer ou à qui il peut ne
questions.

« La solution de M. Jean Bernou
de l'année dernière ; ce que M. Jacq
ment aux *Acta* indique ce qu'il a f
au marquis de L'Hospital sa soluti
de mars de cette année.

« M. Jean Bernoulli, outre la so
aussi publier la méthode par laquelle
en a deux et n'a donné que la plus in
sidérations de Dioptrique. Il ne refu
l'autre plus directe à ceux qui la lui d

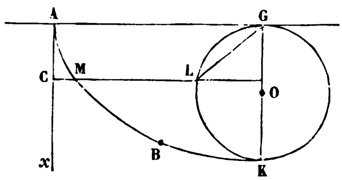
« Il y a dans le genre de ces problèm
et qui dépasse de beaucoup les question
et de minimums, car dans ces dernièr
maximum ou le minimum de l'ordon
ce qui n'est qu'un corollaire de la méth
Mais ici, ce que l'on cherche c'est la c
en quelque chose sur les autres; et sa n

affectée par une ligne donnée de longueur, ayant ses
ës en deux points donnés, et dont le centre de gravité fût
ıs possible.

ı l'on voit combien l'Analyse était loin jusqu'ici de la
n, bien que quelques-uns vantassent leurs méthodes.

reste nous retenons de la solution de M. Jean Bernoulli
elle se trouvent résolus deux problèmes dioptriques de la

Fig 29.



ıte importance, devant la difficulté desquels reculèrent
ghens et beaucoup d'autres. Et nous pouvons maintenant
a courbure continuelle des rayons de lumière de même
gne de l'onde formée par les radiations. »

s il est temps que j'expose ma solution. Comme elle est
e aux autres, je n'ai pas pris le temps de la développer;
ntenterai donc de donner une réponse à la question. J'ai
ar le calcul que la ligne cherchée est la quadratrice des
s de cercle. C'est-à-dire que si la ligne ABK (*fig.* 29) est
e le rectangle de son ordonnée CM et du rayon du
LK, compris entre son point le plus bas et l'horizontale
: A, soit constamment égal au segment de ce même cercle
té entre l'arc et la corde GL, AMB sera la voie par
un corps pesant arrivera le plus vite de A en B.

« Or il est facile de voir que cette quadratrice des seg
cercle est la cycloïde ordinaire. »

Leibniz en donne la démonstration, que nous ne r
pas. L'article se termine par la solution d'un nouveau p
qu'avait proposé Jean Bernoulli.

*Specimen novum Analyseos pro scientia infiniti circ
et quadraturas*, et *Continuatio analyseos quadratur
nalium.* (Acta Eruditorum, 1702 et 1703.)

Ces deux articles ont trait à la réduction des fraction
nelles en fractions simples, pour en faciliter l'intégratio

Quoique la question y soit bien traitée, nous n'en d
parce que nous ne savons pas si Leibniz en a tiré la s
ses propres recherches. Nous ferons toutefois remarqu
Traité de la quadrature des courbes, où Newton s'e
de la même question, n'a été publié qu'en 1704.

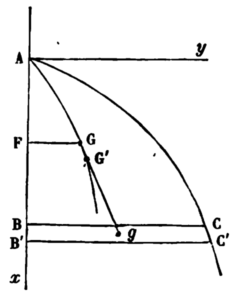
*Constructio problematis ducendi rectas quæ tang
centrorum gravitatis.* C'est-à-dire : *Construction* de la t
à la courbe lieu des centres de gravité (*d'une figure*
(Miscellanea Berolinensia, 1706.)

Leibniz appelle ligne des centres de gravité celle q
constamment par le centre de gravité d'une grandeur
suivant une loi déterminée (*ordinatim*). Soit par exemple
un triligne rectangle ABC, limité par une courbe déte
lorsque la base BC de ce triligne se déplace parallèle
elle-même, le centre de gravité G du triligne décrit une li

z se propose de construire la tangente à cette courbe et à s analogues.

ıt G le centre de gravité du triligne ABC, g celui du

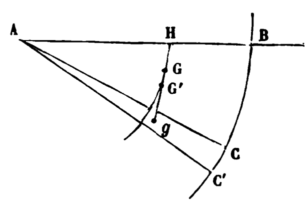
Fig. 3o.



nt additionnel infinitésimal BCC′B′ et G′ celui du nou-riligne AB′C′ : GG′ est l'élément de la courbe considérée, et élément prolongé passe par le point g et la position du point g est au milieu de BC, donc la tangente en G à e des centres de gravité passe par le milieu de la base BC igne.

sidérons en second lieu un secteur variable ABC (*fig.* 31)

Fig. 31.

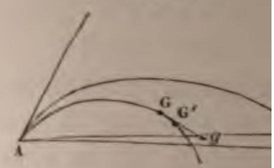


par une courbe quelconque BC; soient HG le lieu du centre

tésimal GAC ; GG' est un élément inf
tres de gravité, mais cet élément prol
position limite de g est au tiers de A
tangente en G à la ligne des centres de
qui divise AC dans le rapport de 1 à
mité C.

On peut, dans l'exemple précédent, s
parte du point A (*fig.* 32) et que le côt

Fig. 32.



mine le secteur soit la tangente en A
secteur se transforme en un segment à un
tion de la tangente au lieu du centre de

Considérons encore le lieu du cent

Fig. 33.

ides centres de gravité sera GC parce que la posi-
ıilieu g de CC′ est en C.

te qu'on pourrait vérifier ces résultats par le
.el, mais non d'une manière aussi générale que
.tion des grandeurs elles-mêmes, car ce n'est pas
oyer le calcul; il constatera, toutefois, le concours
des relativement à la question qui se rapporte au
le.

uisons ce passage pour montrer à quel point
ərfectionné ses notations.

o)

$$x,\quad BC = y,\quad AF = z \quad \text{et} \quad GF = u,$$

aura pour expression

$$\int y\,dx,$$

r rapport à l'axe Ax sera

$$\frac{1}{2}\int y^2\,dx,$$

par rapport à Ay

$$\int xy\,dx.$$

ésenté par

$$\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx},$$

$$\frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

$$u_z = \frac{\ldots}{(\int y\,d\ldots}$$

et

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2\,dx \int y\,dx - \ldots}{(\int y\,d\ldots}$$

d'où résulte

$$\frac{dz}{du} = 2\,\frac{x \int y\,dx - \ldots}{y \int y\,dx - \ldots}$$

qui est le coefficient angulaire (par ra…
à la courbe lieu du centre de gravité d…
s'accorde avec la règle donnée pour la …
à cette courbe en un de ses points : …
de BC, d'après la règle, la tangente en…
cient angulaire sera

$$\frac{FB}{BK - FG},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x - z}{\frac{y}{2} - u}$$

ou

$$\frac{x - \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}}{\ldots}$$

eæ super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu motu provolutionis et composito ex ambobus. C'est-à-*u mouvement d'une ligne sur une autre et de ses trois le glissement, le roulement et le mouvement composé* x. (Acta eruditorum, 1706.)

ticle ne contient rien de bien remarquable ni de bien 1. Leibniz démontre, d'abord, que, si une courbe roule autre, sans glissement, elle tourne à chaque instant du point de contact; en second lieu, que, si une courbe r une autre, en restant parallèle à elle-même, et de manière oint de rencontre ne se déplace pas sur la courbe mobile, t quelconque lié à cette courbe mobile décrit une courbe la courbe fixe.

terait à analyser la correspondance de Leibniz avec Wallis; ous n'y avons rien trouvé qui mérite d'être signalé d'une e spéciale, après tout ce que nous avons déjà rapporté des ouvrages de Leibniz. La raison n'en est pas que cette correspondance ne soit pas intéressante par elle-même, mais plutôt, qu'elle roule principalement, ce qui est tout naturel, sur stions qui avaient fait l'objet des travaux de Wallis et qui d'abord attiré l'attention de Leibniz dans sa jeunesse; en lieu, que cette correspondance ne s'établit qu'à partir 5, époque à laquelle Leibniz avait publié les plus importes ses mémoires.

nous bornons à tirer de cette correspondance, qui dans les termes les plus amicaux jusqu'en 1699, la de la douceur de caractère de Leibniz; car Wallis, de

son côté, n'entendait pas raillerie sur ce qui pouvait tou
nation.

Nous n'avons étudié Leibniz, dans ce qui précède, qu
géomètre; il nous est impossible de passer sous silence l'in
considérable qu'il a exercée sur les progrès des sciences na
dont, comme Descartes, c'est-à-dire en vrai philosoph
préoccupait bien plus encore que de Géométrie.

Nous avons rapporté en leur lieu les découvertes de
de Graaf et de Leuwenhoek, relatives à la génération. Ces
vertes n'avaient donné naissance qu'à des théories contra
où le père et la mère étaient alternativement destitués et
de l'influence prépondérante.

On ne saurait dire que Leibniz résolut entièrement la p
puisque l'embryogénie est encore entourée de bien des
mais il présenta sur le sujet des idées justes, dont la plup
restées dans la science.

« Aujourd'hui, dit-il dans sa *Monadologie*, que l'on s'est
par des recherches exactes faites sur les plantes, les insec
animaux, que les corps organiques de la nature ne sont
produits d'un chaos ou d'une putréfaction, mais toujours
semences dans lesquelles il y avait sans doute quelque
mation, on a jugé que le corps organique ou l'animal
était déjà avant la conception, et que, par le moyen de la
tion, cet animal a été seulement disposé à une grande tr
mation, pour devenir un animal d'une autre espèce. Les a
dont quelques-uns sont élevés au degré des plus grands

ıoyen de la conception, peuvent être appelés spermati-
ais ceux d'entre eux qui demeurent dans leur espèce,
ire la plupart, naissent, se multiplient et sont détruits
les grands animaux, et il n'y a qu'un petit nombre d'élus
e à un plus grand théâtre. »

ı'est qu'une idée vague, peut-être juste, mais peu utile à
e. Leibniz rendit un plus grand service en affirmant le
que l'un et l'autre sexe participent à un égal degré à la
n du fœtus, la mère en fournissant l'ovule, et le père le
ozoaire. Voici ce qu'il écrivait à ce sujet à M. Bourguet,
:

'oserais assurer que les animaux que M. Leuwenhoek a
visibles dans les semences, soient justement ceux que
s ; mais aussi je n'oserais encore assurer qu'ils ne le sont
t j'attends avec impatience ce que M. Wallisnieri nous
sur la question ; et, en attendant, je n'en voudrais pas
ussi décisivement que vous le faites, en disant que le
nt de M. Leuwenhoek est une fable des plus creuses.
ghens, qui était un des hommes les plus pénétrants de
ps, n'en jugeait pas ainsi.

prodigieuse quantité de ces animaux (qui sont votre
e objection) ne s'y oppose en rien. On trouve une abon-
mblable dans les semences de quelques plantes. Il y en
xemple, dont la graine consiste en une poussière très
Je ne vois pas non plus qu'il y ait de la difficulté sur
uction dans l'œuf de l'un de ces animaux, à l'exclusion
es (ce qui fait votre seconde objection) ; il s'en introduit
ıp apparemment, puisqu'ils s ... mais il y a sans
ans l'œuf un seul endr ... r avec effet ;

objection est que l'œuf et le fœtus s
cette proposition n'est point prouvée;
fût qu'un réceptacle propre à donner l
transformation. La cinquième objectio
gues modernes, et particulièrement selo
tozoaires doivent être des animaux de
gent et se perpétuent tout comme il a
qui nous sont connus. C'est de quoi je
à mon avis, quand ces animaux seraien
naux, ils ne laisseraient pas d'être u
vivants, dont quelques-uns seraient éle
par une transformation.

« Cependant, je n'oserais pas non plu
ment soit faux, qui va à soutenir, que l
déjà dans l'œuf, quoique la conception
blable. Ne décidons donc rien d'un ton t
ne traitons point mal un homme comme
le public doit des grâces pour les peines
recherches. »

Toutes ces idées étaient neuves à l'épo
moins au succès des théories nouvelles

aché par le vent se transporte à l'extrémité de ce tube
ainsi dans l'ovaire et y féconde les œufs ou la semence.
e en est que, si l'on enlève le pollen, la fécondation n'a
»

royons devoir reproduire encore les remarquables idées
z sur la série totale des êtres animés :

ommençant depuis nous et allant jusqu'aux choses les
es, c'est une descente qui se fait par fort petits degrés et
uite continue de choses qui diffèrent fort peu l'une de
l y a des poissons qui ont des ailes et à qui l'air n'est pas
et il y a des oiseaux qui habitent dans l'eau et ont le
d comme les poissons. Il y a des animaux qui appro-
ort de l'espèce des oiseaux et de celle des bêtes, qu'ils
le milieu entre eux. Les amphibies tiennent également
terrestres et aquatiques. Il y a des bêtes qui semblent
ant de connaissance et de raison que quelques hommes;
une si grande proximité entre les animaux et les végé-
e, si vous prenez le plus imparfait des uns et le plus
es autres, à peine remarquerez-vous aucune différence
ble entre eux. Ainsi les espèces sont liées ensemble, et ne
que par des degrés presque insensibles.

ense avoir de bonnes raisons pour croire que toutes les
es classes des êtres dont l'assemblage forme l'univers ne
s les idées de Dieu, qui connaît distinctement leurs
s essentielles, que comme autant d'ordonnées d'une
urbe dont l'union ne souffre pas qu'on en place d'au-
e deux, à cause que cela marquerait du désordre et de
tion.

hommes tiennent donc aux animaux, ceux-ci aux

« Or, puisque la loi de continui
minations essentielles d'un être s
autre, aussi, en conséquence, les p
s'approcher graduellement de celle
que tous les ordres des êtres natur
chaîne dans laquelle les différe
d'anneaux, tiennent si étroitemen
est impossible aux sens ou à l'imag
le point où quelqu'un commence ou
bordent, ou qui occupent, pour ain
ou de rebroussement devant être éq
tères qui peuvent se rapporter aux e

« Ainsi l'existence de zoophytes
Boddens les nomme, de plantes anim
mais il est même convenable à l'ordr
Et telle est la force du principe de co
seulement je ne serais pas étonné d'
des êtres qui, par rapport à plusieu
de se nourrir ou de se multiplier, pu
taux à aussi bon droit que pour des

dérobe aux observations communes, et qui se trouvent s dans les entrailles de la terre et dans les abîmes des

Nous n'observons que depuis hier, comment serions-nous s à nier ce que nous n'avons pas encore eu occasion de

Le principe de continuité, qui est hors de doute chez moi, rait servir à établir plusieurs vérités importantes dans la able philosophie, laquelle, s'élevant au-dessus des sens et de gination, cherche l'origine des phénomènes dans les régions lectuelles. Je me flatte d'en avoir quelques idées, mais ce n'est pas fait pour les recevoir. »

Leibniz, dit M. Papillon, ne se trompe pas; et cette parole point l'exclamation d'un présomptueux orgueil, c'est l'ex- ion simple et sincère de la vérité.

Aussi bien, c'est la marque des hommes de génie de penser pour leurs contemporains, mais pour la postérité, et voilà ment pourquoi ils sont mieux appréciés et paraissent plus ds longtemps après leur mort que de leur vivant même, à erse des talents qui subjuguent leur époque et s'en font irer, mais dont la gloire ne dure pas. »

n physiologie, où il rejette avec la même force les théories aniques et animistes de Descartes et de Stahl, Leibniz n'est moins original. Ses vues à ce sujet ont donné naissance à la rine du *vitalisme*, fondée essentiellement sur ce principe que e totale d'un organisme individuel résulte des vies particu- s d'une infinité d'organismes infiniment petits, chaque être nt n'étant qu'une agglomération d'autres êtres vivants en bre immense.

Enfin, Leibniz fonda en quelq
dans sa *Protogée*, où il expliqué
directes, l'existence de tant d'empr
ou d'animaux aujourd'hui disparu
n'avaient été pris avant lui, si ce n
pour des jeux de la nature.

« Ces idées, dit Flourens, ne fire
Le siècle n'était pas préparé à les
en latin, ne sortit pas des cabinets
triomphe des idées de Leibniz, c
seconde moitié du XVIII^e^ siècle et le
velle, celle de l'éloquence. »

FIN DE LA SIXIÈ

TABLE ALPHABÉTIQUE.

Paris. — Imp. Gauthier-Villa